Föreläsning 21/11-13

Dagens föreläsning:
- talföljder
- återkoppling till fixpunktssatsen
- Newton-Raphsons metod
- numeriska serier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

TALFÖLJDER

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$

lista av reella tal $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar om $\exists\, x \in \mathbb{R}$ s.a. $|x_n - x| \to 0$, $n \to \infty$
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyföljd om $|x_n - x_m| \to 0$, $n, m \to \infty$

SATS: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyföljd

SATS: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyföljd

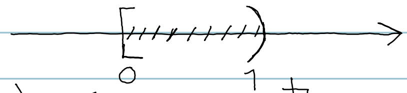
$\Rightarrow$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad, dvs. $\exists\, M > 0$ s.a. $|x_n| \leq M \quad \forall n$

SATS: Varje talföljd har en monoton delföljd (antingen växande eller avtagande)

Supremumaxiomet

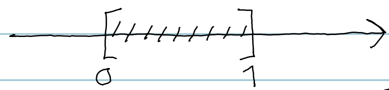
Varje icke-tom uppåt begränsad delmängd av $\mathbb{R}$ har ett supremum

Ex. $[0,1)$



$\sup[0,1) = 1$ $\quad \nexists \max[0,1)$

$[0,1]$



$\sup[0,1] = 1$ $\quad \exists \max[0,1] = 1$

M uppåt begränsad icke-tom delmängd av $\mathbb{R}$

$\sup M = x \in \mathbb{R}$

med egenskapen

1. $\tilde{x} \leq x$ alla $\tilde{x} \in M$ (x övre begränsning till M)
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{x} \in M$ s.a. $x - \varepsilon < \tilde{x}$ (x minsta övre begränsningen till M)

SATS: (fullständigheten för $\mathbb{R}$)

supremumaxiomet $\Longleftrightarrow$ varje Cauchyföljd konvergerar

BEVIS:

"$\Longrightarrow$" Antag att supremumaxiomet gäller

Tag en godtycklig Cauchyföljd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (av reella tal)

Enligt tidigare sats är $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ begränsad

Enligt en annan tidigare sats har $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en monoton delföljd

kalla denna delföljd för $(y_n)_{n=1}^{\infty}$

Det gäller att $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande eller avtagande följd

Antag att $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande (fallet $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ avtagande lämnas som hemläxa)

Det gäller att $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande och begränsad

Sätt $M = \{y_n : n = 1, 2, \ldots\}$ M icke-tom delmängd av $\mathbb{R}$ som är uppåt begränsad. Enligt supremumaxiomet existerar $\sup M \in \mathbb{R}$

Beteckna $\sup M$ med y

Påstående: $y_n \to y, \quad n \to \infty$

ty: • $y_n \leq y \quad \forall n$

• $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_{n_0} : \; y - \varepsilon < y_{n_0}$

$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ växande $\Rightarrow$ $y - \varepsilon < y_n \quad \forall n \geq n_0$

(1) $\Rightarrow$ $y - \varepsilon < y_n \leq y$

alltså $|y_n - y| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Slutsats: $y_n \to y, \; n \to \infty$

Påstående: $x_n \to y, \quad n \to \infty$

ty $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyföljd

delföljd $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ av $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot y

Ska visa: $x_n \to y, \; n \to \infty$

Notera $\rightarrow$

$$|x_n - y| = |(x_n - y_n) + (y_n - y)| \leq |x_n - y_n| + |y_n - y|$$

$$|x_n - y| = |(x_n - y_n) + (y_n - y)| \le$$

$$\le \underbrace{|x_n - y_n|}_{= |x_n - x_{n_k}|} + |y_n - y| \to 0 \quad \text{då } n \to \infty$$

$|x_n - y_n| \to 0$ då $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy

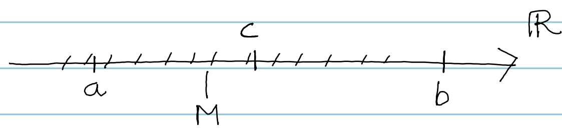
$= x_{n_k}$ för något k och $k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$|y_n - y| \to 0$ då $y_n \to y$

(*)

" $\Leftarrow$ " Antag att varje Cauchyföljd konvergerar

Ska visa att varje icke-tom uppåt begränsad delmängd M av $\mathbb{R}$ har en minsta övre begränsning $\xi = \xi_M$



b är en övre begränsning till M dvs
$x \le b \quad \forall x \in M$

Fixera godtyckligt $a \in M$

Sätt $a_1 = a$ och $b_1 = b$

Sätt $c = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

$\rightarrow$

Fall 1: c är en övre begränsning till M.

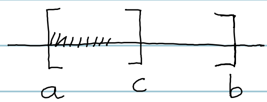
I så fall, sätt $a_2 = a_1$ och $b_2 = c$

Fall 2: c är inte en övre begränsning

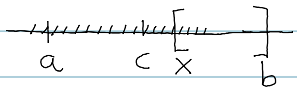
Då finns $x \in M$ s.a. $c < x$. I så fall

sätt $a_2 = x$, $b_2 = b_1$

Fall 1



Fall 2



Fortsätt induktivt

Sätt $I_n = [a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \ldots$

Vi har

- $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$
- $a_n \in M$ alla n
- $a_m \in I_n$ alla $m \geq n$ och

$$|b_n - a_n| \leq 2^{-n+1} |b_1 - a_1| \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Betrakta följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Detta är en

Cauchyföljd! →

eftersom

$|a_n - a_m|$ ($n > m$ WLOG så $a_n, a_m \in I_m$)

$|a_n - a_m| \leq$ längden av intervallet $I_m \leq$

$\leq 2^{-m+1} |b_1 - a_1| \longrightarrow 0$ då $m, n \longrightarrow \infty$

Från antagandet (*) följer att

$\exists\ \xi \in \mathbb{R}$ s.a. $a_n \to \xi$, $n \to \infty$

Återstår att visa att ξ är den minsta övre begränsningen till M

Detta lämnas som hemläxa (titta på följden $(b_n)_{n=1}^{\infty}$)

ÅTERKOPPLING TILL FIXPUNKTSSATSEN

Antag

1) $f : I \to I$

2) $\exists\, k<1$ s.a. $|f(x)-f(\tilde{x})| \leq k|x-\tilde{x}| \quad \forall x, \tilde{x} \in I$

där $I = [a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty, a]$, $\mathbb{R}$
med $a, b \in \mathbb{R}$

Då gäller

1) $\exists!\, \alpha \in I : \alpha = f(\alpha)$

2) $\forall x_0 \in I$ gäller $x_n \to \alpha$, $n \to \infty$

där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Bevisidé:
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyföljd

Ex. $f(x) = \frac{x}{2}$, $I = [0, \infty)$

f uppfyller 1) & 2) i fixpunktssatsen

$|f(x) - f(\tilde{x})| = \left|\frac{x}{2} - \frac{\tilde{x}}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - \tilde{x}| \quad \forall x, \tilde{x} \in I$

Kan ta $k = \frac{1}{2}$

Ex. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\cos x$, $x \in [0, \infty)$

f uppfyller 1) & 2) i fixpunktssatsen

$$\left| f(x) - f(\tilde{x}) \right| = \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\cos x - \left(\frac{\tilde{x}}{2} + \frac{1}{3}\cos \tilde{x}\right)\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2}(x - \tilde{x}) + \frac{1}{3}(\cos x - \cos \tilde{x}) \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{1}{2}(x - \tilde{x}) \right|}_{= \frac{1}{2}|(x - \tilde{x})|} + \underbrace{\left| \frac{1}{3}(\cos x - \cos \tilde{x}) \right|}_{\underbrace{\frac{1}{3}|\cos x - \cos \tilde{x}|}_{= \left|\frac{d}{dx}\cos x\right| \Big|_{x=\eta} |x - \tilde{x}|}} \leq$$

Lagranges medelvärdessats

för något η mellan x och $\tilde{x}$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)|x - \tilde{x}| \quad \text{alla } x, \tilde{x} \in [0, \infty)$$

Ex. $f(x) = x + e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = |f'(\eta)|\,|x - \tilde{x}| =$$

för något η mellan x och $\tilde{x}$, $\eta > 0$

$$= \underbrace{|1 - e^{-\eta}|}_{<1}\,\underbrace{|x - \tilde{x}| <}_{< |x - \tilde{x}|}$$

OBS $f(x) = x + e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$ saknar fixpunkt

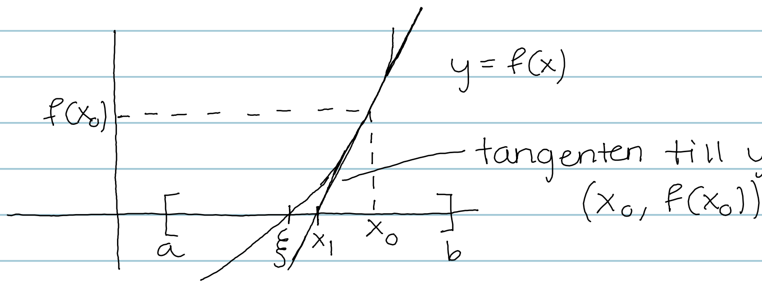
NOTERA: f är INTE en kontraktion

NEWTONS METOD

$f(x) = 0$

Antag att

f, f', f'' kontinuerliga på $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$
$a<b$



$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$y = 0$ ger $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Bilda iteraten $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n = 0,1,2,\ldots$

under förutsättning att alla $x_n \in I$

Förhoppning: $x_n \longrightarrow \xi$, $n \to \infty$

Finns ingen garanti för detta

Sätt $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in I$

Derivera

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} =$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Notera: $\exists\ \delta > 0$ s.a.

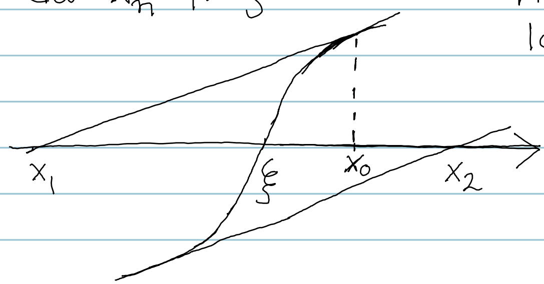
$$\max_{x \in [\xi-\delta, \xi+\delta]} |g'(x)| = \max_{x \in [\xi-\delta, \xi+\delta]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

Kan visa att om $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$ så gäller

$$x_n \to \xi, \quad n \to \infty$$

Ex då $x_n \not\to \xi$

Har valt x_0 för långt bort ifrån ξ



Uppskattningar: Antag att $\cancel{\xi}$ $\xi, x_n, x_{n+1} \in I$

- $|x_{n+1} - \xi| \le C\,|x_n - \xi|^2$

där C kan uppskattas uppifrån av

Taylorutveckling kring x_n

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\eta_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \ldots \quad (*)$$

för något η_n mellan x_n och ξ

Vi får

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \xi$$

$(*)$ ger $\quad x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$

$$|x_{n+1} - \xi| = \frac{1}{2}\frac{|f''(\eta_n)|}{|f'(x_n)|}|x_n - \xi|^2$$

Sätt $\quad M = \max_{x \in I} |f''(x)|$

$$L = \min_{x \in I} |f'(x)|$$

$$K = \max_{x \in I} |f'(x)|$$

alltså

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{L}|x_n - \xi|^2$$

ty $\quad |x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| = \frac{1}{|f'(x_n)|}|f(x_n) - \underbrace{f(\xi)}_{=0}| \geq$

$$\geq \frac{1}{K}|f(x_n) - f(\xi)| = \longrightarrow$$

$$= \frac{1}{K}|f'(\mu_n)||x_n - \xi| \geq \frac{L}{K}|x_n - \xi|$$

för något μ_n mellan x_n och ξ

$$\Rightarrow \quad |x_n - \xi| \leq \frac{K}{L}|x_{n+1} - x_n|$$

1816 a

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \ldots$$

Visa att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och bestäm gränsvärdet

Lösning: Rekursionsformeln $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Om $x_n \to \alpha$, $n \to \infty$ så gäller

$$\alpha \leftarrow x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt{2+\alpha} = \alpha$$

Alltså

$$\alpha = \sqrt{2+\alpha}, \quad \alpha > 0$$

kvadrerar $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, $\alpha > 0$

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

Vi har $\alpha = 2$

Återstår att visa att $x_n \to 2$, $n \to \infty$

Fixpunktssatsen: Sätt

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$ och välj

$$I = [0,2]$$ t.ex.

Vi noterar att

$$f : I \to I$$

Är f en kontraktion på I ?

Derivera f

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

Vi får

$$\max_{x \in I} |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$$

Alltså $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x - \tilde{x}|$

$\forall x, \tilde{x} \in I$ enligt medelvärdessatsen

Alltså: f är en kontraktion på I

Fixpunktssatsen ger att f har en entydigt bestämd fixpunkt i I och eftersom $x_1 \in I$

kommer $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ att konvergera mot fixpunkten

Fixpunkten $= 2$

Alternativ:

Sats i ELW: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton talföljd som är begränsad $\Rightarrow$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Detta är en växande talföljd

Notera att om $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar måste gränsvärdet vara lika med 2

Vi har $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$

Antag att $x_n \leq 2$

Då gäller att $0 \leq x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq$

$\leq \sqrt{2 + 2} = 2$

Induktionsprincipen ger $x_n \leq 2 \quad \forall n$

Enligt ELW-sats konvergerar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$