Föreläsning 19/11-13

Fixpunktssatsen

Antag $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ och

1. $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$

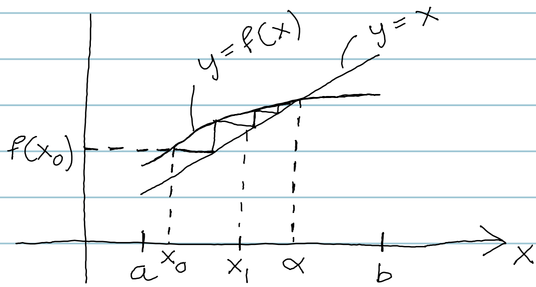
2. f kontraktion, dvs. finns $k \in [0,1)$ s.a.

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq k|x - \tilde{x}| \quad \forall\, x, \tilde{x} \in [a,b]$$

Då gäller

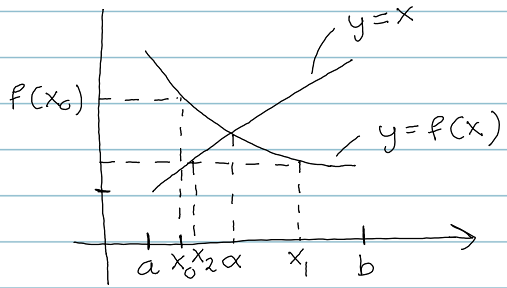
① $\exists!\ \alpha \in [a,b]$ s.a. $f(\alpha) = \alpha$ (α kallas fixpunkt)

② för varje $x_0 \in [a,b]$ gäller $x_n \longrightarrow \alpha$, $n \to \infty$
där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



$f' \geq 0$

$x_1 = f(x_0)$



$f' \leq 0$

$x_1 = f(x_0)$

Uppskattningar

- $|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha|$ alla n, eftersom

$$|x_{n+} - \alpha| = |f(x_n) - f(\underset{\alpha}{\underset{\|}{\alpha}})| \leq k|x_n - \alpha|$$

Av detta följer $|x_{n+1} - \alpha| \leq k^n|x_1 - \alpha| \leq$

$$\leq k^n(|a| + |b|)$$

ty $|x_n - \alpha| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - \alpha)| \leq$

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - x_{n+1}| + k|x_n - \alpha|$$

$$\underbrace{(1-k)}_{>0}|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n+1}|$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{1-k}|x_n - x_{n+1}|$$

- $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |x_{n+1} - x_n|$ alla n

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq k\, |x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n+1}|$$

Konvergenta följder i $\mathbb{R}$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en konvergent följd om

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ s.a. $x_n \to x,\ n \to \infty$

dvs. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N : \forall\, n \geq N : |x_n - x| < \varepsilon$

Cauchy följder i $\mathbb{R}$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd om

$|x_n - x_m| \to 0$ då $n, m \to \infty$

dvs. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Det gäller

- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent $\Rightarrow$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy följd

  ty fixera $\varepsilon > 0$

$\longrightarrow$

ty fixera $\varepsilon > 0$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent $\Rightarrow$ $\exists N$ och $x \in \mathbb{R}$ s.a.

$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ alla $n \geq N$

Då gäller

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|x_n - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_m - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Alltså

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy följd

- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy följd $\Rightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}$ s.a. $|x_n| \leq M$ $\forall n$

ty fixera $\varepsilon = 1$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyföljd $\exists N$

s.a. $|x_n - x_m| < 1$ $\forall n, m \geq N$

Spec.

$|x_n - x_N| < 1$ $\forall n \geq N$ och alltså

$|x_n| < 1 + \underbrace{|x_N|}_{<\infty}$ $\forall n \geq N$ $\longrightarrow$

eftersom

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N|$$

Vi får

$$|x_n| \leq \underbrace{\max(\underbrace{|x_1|}_{<\infty}, \underbrace{|x_2|}_{<\infty}, \dots, \underbrace{|x_{N-1}|}_{<\infty}, \underbrace{|x_N|+1}_{<\infty})}_{\in \mathbb{R}} < \infty \quad \text{alla } n$$

- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ godtycklig följd i $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ finns en monoton delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

följd: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

delföljd: $x_1, \cancel{x_2}, \cancel{\dots}, x_n, \dots \cancel{\dots}$

stryker vissa (dock fortfarande oändlig följd)

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

$$n_k < n_{k+1} \quad \text{alla } k$$

avtagande följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n$

växande följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n$

$\longrightarrow$

monoton följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en följd som är avtagande eller växande

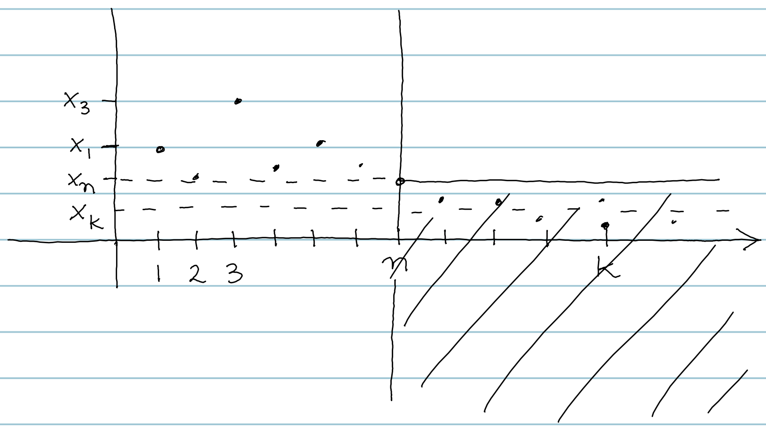
~~Exempel~~

ty: inför begreppet vändpunkt nedåt

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Vi säger att x_n är en vändpunkt nedåt

om $x_k \leq x_n$ alla $k \geq n$



Två fall:

Fall 1: Finns oändligt många ändpunkter nedåt, kalla den

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$

Det gäller

$$x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \dots \geq x_{n_k} \geq \dots$$

Vi har avtagande delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ av $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

Fall 2: Finns inga vändpunkter nedåt eller högst ändligt många vändpunkter nedåt

Välj x_{n_1} sådant att alla vändpunkter nedåt uppfyller $k \leq n_1$

Välj x_{n_2} sådant att $x_{n_1} \leq x_{n_2}$

Välj x_{n_3} sådant att $x_{n_2} \leq x_{n_3}$

Fortsätt induktivt

Vi får en växande delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ av $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

(existensen av x_{n_2} klar då x_{n_1} ej är vändpunkt nedåt)

Åter till fixpunktssatsen

"Nytt bevis" (egentligen variant av det gamla)

Fixera $x_0 \in [a,b]$

Bilda $x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 0,1,2,\ldots$

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq$$

$$\leq k^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq k^n |x_1 - x_0| \quad n = 1,2,\ldots$$

Påstående: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bildar en Cauchyföljd

ty

$$|x_n - x_m| = \{n > m\} =$$

$$= |(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} -) \ldots (- x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_m)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|x_n - x_{n-1}|}_{\leq k^{n-1}|x_1 - x_0|} + \underbrace{|x_{n-1} - x_{n-2}|}_{\leq k^{n-2}|x_1 - x_0|} + \ldots + \underbrace{|x_{m+1} - x_m|}_{\leq k^m |x_1 - x_0|} \leq$$

$$\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m)|x_1 - x_0| =$$

$$= k^m |x_1 - x_0| \underbrace{(k^{n-1-m} + k^{n-2-m} + \ldots + 1)}_{\leq \frac{1}{1-k} \text{ (geometrisk serie)}} \to$$

$$\to 0, \quad n, m \to \infty$$

SATS: Varje Cauchyföljd av reella tal konvergerar

Antag att denna sats gäller

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ s.a. $x_n \to x$, $n \to \infty$

Påstående: $x = f(x)$

ty

$$|x - f(x)| = |(x - x_{n+1}) + (x_{n+1} - f(x))| \leq$$

$$\leq |x - x_{n+1}| + \underbrace{|\underbrace{x_{n+1}}_{f(x_n)} - f(x)|}_{\leq k|x_n - x|} \longrightarrow 0,\ n \to \infty$$

Vi har $|x - f(x)| = 0$ dvs $x = f(x)$

Detta visar existens av fixpunkt. Entydigheten visas som tidigare