Föreläsning 18/11-13

17.13 forts.

p_n = sannolikheten för att spelare A förlorar då han startar med n kronor $\quad n = 0, 1, 2, \ldots, k$

p = sannolikheten för att A vinner en krona då han spelar en gång

q = sannolikheten för att A förlorar en krona då han spelar en gång $= 1-p \qquad 0<p<1$

$$\boxed{\begin{aligned} &p_0 = 1 \\ &p_k = 0 \\ &p_n = p\, p_{n+1} + q\, p_{n-1} \quad (*) \end{aligned}}$$

(*) Differensekvation

$$p_{n+2} - \frac{1}{p} p_{n+1} + \frac{q}{p} p_n = 0 \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Karakteristiska ekvationen: $r^2 - \frac{1}{p} r + \frac{q}{p} = 0$

Rötterna till kar.ekv.

$$r_{1,2} = \frac{1}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2p}\right)^2 - \frac{q}{p}} \quad \rightarrow$$

där

$$\left(\frac{1}{2p}\right)^2 - \frac{q}{p} = \left(\frac{1}{2p}\right)^2 - \frac{1}{p} + 1 = \left(\frac{1}{2p} - 1\right)^2$$

alltså

$$r_{1,2} = \frac{1}{2p} \pm \left|\frac{1}{2p} - 1\right|$$

Fall 1 : $p = \frac{1}{2}$

$$r_1 = r_2 = 1$$

Fall 2 : $p \neq \frac{1}{2}$

$$r_1 = \frac{1}{p} - 1, \quad r_2 = 1$$

Fall 1:

$$P_n = (A + Bn)\, 1^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P_0 = 1 \implies a = 1$$

$$P_k = 0 \implies b = -\frac{1}{k}$$

Vi får

$$P_n = 1 - \frac{n}{k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Fall 2:

$$P_n = A\left(\frac{1}{p} - 1\right)^n + B\, 1^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P_0 = 1 \implies A + B = 1$$

$$p_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\left(\frac{1}{p}-1\right)^k + B = 0$$

$$\text{dvs} \quad A\left(\frac{q}{p}\right)^k + B = 0$$

Alltså

$$A = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k} \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}$$

Vi får

$$p_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Observation:

Gäller $\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k} \longrightarrow 1 - \dfrac{n}{k}$ då $p \to \dfrac{1}{2}$?

Notera

$$\frac{q}{p} \longrightarrow 1 \quad \text{då} \quad p \to \frac{1}{2}$$

Sätt $\dfrac{q}{p} = 1 + x$, $p \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ svarar mot att $x \to 0$

$$\frac{(1+x)^n - (1+x)^k}{1-(1+x)^k} \longrightarrow ? \quad \text{då} \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\ell = e^{\ln[(1+x)^\ell]} = e^{\ell \ln(1+x)} =$$

$$= \left\{ \ln(1+x) = x + O(x^2),\ x \to 0 \right\} = e^{\ell(x + O(x^2))} =$$

$$= \left\{ e^t = 1 + t + O(t^2),\ t \to 0 \right\} = 1 + \ell x + O(x^2);$$

$\longrightarrow$

$$\frac{(1+x)^n-(1+x)^k}{1-(1+x)^k} = \frac{(1+nx+O(x^2))-(1+kx+O(x^2))}{1-(1+kx+O(x^2))} =$$

$$= \frac{(n-k)x+O(x^2)}{-kx+O(x^2)} = \frac{n-k+O(x)}{-k+O(x)} \Longrightarrow \frac{n-k}{-k} =$$

$$= 1-\frac{n}{k}, \quad x \to 0$$

Svaret på frågan i observationen är ja

ITERATIONER

Ex. $x \cdot \sqrt[3]{x+1} = 0,2 \qquad (*)$

Vill bestämma den entydigt bestämda roten till $(*)$. Obs. VL är strängt växande

Roten till $(*)$ är > 0

$$x = \frac{0,2}{\sqrt[3]{x+1}}, \quad x \geq 0$$

Roten är också $< 0,2$

Sätt $x_0 = 0,2$

Sätt $f(x) = \dfrac{0,2}{\sqrt[3]{x+1}}$

Definiera

$$x_1 = f(x_0) \approx 0,1882$$
$$x_2 = f(x_1) \approx 0,1888$$
$$x_3 = f(x_2) \approx 0,1888$$
$$\vdots$$

SATS (fixpunktssatsen)

Antag $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ och

1. $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$

2. finns $k<1$ sådant att $|f(x)-f(\tilde{x})| \leq$
$\leq k|x-\tilde{x}|$ alla $x, \tilde{x} \in [a,b]$

(dvs f Lipschitzkont. med Lipschitz-konst. <1, dvs f är per definition en kontraktion)

Då gäller:

① $\exists$ entydigt bestämt $\alpha \in [a,b]$ s.a. $f(\alpha)=\alpha$

② $\forall\, x_0 \in [a,b]$ gäller

$$x_n \longrightarrow \alpha, \quad n \longrightarrow \infty$$

där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,2,\ldots$

BEVIS AV SATSEN

① Entydigheten

Antag $\alpha, \tilde{\alpha} \in [a,b]$

$$\begin{cases} \alpha = f(\alpha) \\ \tilde{\alpha} = f(\tilde{\alpha}) \end{cases}$$

Visa att : $\alpha = \tilde{\alpha}$

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\tilde{\alpha})| \leq k|\alpha - \tilde{\alpha}| \quad , \quad k < 1$$

Alltså $|\alpha - \tilde{\alpha}| = 0$ och $\alpha = \tilde{\alpha}$

Existensen

Sätt $g(x) = x - f(x) \quad , \quad x \in [a,b]$

$g(x)$ kontinuerlig eftersom $f(x)$ kontinuerlig

$$g(a) = a - \underbrace{\underbrace{f(a)}_{\in [a,b]}}_{\geq a} \leq 0$$

$$g(b) = b - \underbrace{f(b)}_{\leq b} \geq 0$$

→

Om $g(a) < 0 < g(b)$ så ger satsen om

mellanliggande värden att

$\exists\ \alpha \in [a,b]$ s.a. $g(\alpha)=0$, dvs. $f(\alpha)=\alpha$

Om $g(a)=0$ eller $g(b)=0$ är existensen

av fixpunkt $\alpha \in [a,b]$ trivial ① klar!

② Fixera $x_0 \in [a,b]$ och bilda $x_{n+1} = f(x_n)$,
$n = 0,1,2,\dots$

Vi har

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k\,|x_{n-1} - \alpha| \leq$$

$$\leq \dots \leq \underbrace{k^n}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} \underbrace{|x_0 - \alpha|}_{<\infty} \longrightarrow 0,\ n \to \infty$$

eftersom $k \in [0,1)$

② klar!

Ex (forts.)

$$f(x) = \frac{0,2}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Välj t.ex. intervallet $[0,1]$

1. $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ detta gäller!

2. f är en kontraktion (dvs. Lipschitz-kont. med Lipschitz-konst. <1)

   f deriverbar

$$f'(x) = -\frac{0,2}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^{4/3}}$$

$$\Longrightarrow \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{3} \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{3}$$

Enligt medelvärdessatsen

$$\left| f(x) - f(\tilde{x}) \right| = \left| f'(\xi(x,\tilde{x})) \right| \left| x - \tilde{x} \right| \leq \frac{1}{3} \left| x - \tilde{x} \right| \quad \forall x, \tilde{x} \in [0,1]$$

för något ξ mellan x och $\tilde{x}$

Alltså f är en kontraktion på $[0,1]$

$\longrightarrow$

Enligt fixpunktssatsen finns en entydigt bestämd $\alpha \in [0,1]$ så att $\alpha = f(\alpha)$ och för varje $x_0 \in [0,1]$ gäller

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ gånger}}(x_0) \longrightarrow \alpha, \quad n \to \infty$$

Ex. $x^3 - x - 1 = 0 \qquad (*)$

Vi observerar att $1^3 - 1 - 1 < 0$
och $2^2 - 2 - 1 = 5 > 0$ och
alltså finns en rot till $(*)$ i $[1,2]$

Skriv om $(*)$ på formen $x = f(x)$, $x \in [1,2]$

① $f_1(x) = \sqrt[3]{x+1}$

~~②~~ $f_2(x) = x^3 - 1$

~~③~~ $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

⋮

$f_1(x)$ är en kontraktion!