Föreläsning 14/11-13

DIFFERENSEKVATIONER

Linearitet (för linjära)
Analogin med ODE (ordinära diff.ekv.)

Analogin:

$\mu \geq 0$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

efter x_1: avtagande, nedåt begränsad av $\sqrt{2}$ (induktivt)

$\Rightarrow$ följden är konvergent

Om $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$, så är det $\sqrt{2}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ $(=\sqrt{\mu})$

Differenskvot
för kontinuerliga funktioner (derivata):

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

$$\left(\xrightarrow{h\to 0} \dot{x}(t)\right)$$

Diskret
1 enhet

$$\frac{x(n+1)-x(n)}{(n+1)-n} = x_{n+1} - x_n = \Delta x_n$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} x_n \quad , \quad x_n^2 \to 2$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{2} x(t) \quad ; \quad \dot{x} = \frac{2 - x^2}{2x}$$

kontinuerlig analog

första ordningens separabel

$$\frac{2x\dot{x}}{2 - x^2} = 1$$

$$(x^2 \neq 2)$$

OBS! Ingen kvot!

$$\frac{2x}{2 - x^2} \boxed{\frac{dx}{dt}} = 1$$

Minnesregel:

$$\int \frac{2x}{2 - x^2}\, dx = \int dt$$

$$\int \underbrace{\frac{2x}{2 - x^2}}\, \overbrace{\dot{x}\, dt}^{= dx} = \text{primitiv till } \frac{2x}{2 - x^2} \text{ (av } x)$$

$$= \int \frac{2x}{2 - x^2}\, dx = -\int \frac{(2 - x^2)'}{2 - x^2}\, dx = -\ln|2 - x^2| =$$

$$= t + C$$

Godtyckliga, reella konstanter

$$\ln|2 - x^2| = -t + C$$

→

$$e^{\ln|2-x^2|} = |2-x^2| = \cancel{e^{C}}^{\,C'} e^{-t}, \quad C' > 0$$

C' fortfarande godtycklig, dock >0

$$2 - x^2 = C' e^{-t}, \quad C' (\neq 0)$$

insättning

$$2 - x^2 = \underbrace{C' e^{-t}}_{\downarrow\, t \to \infty \atop 0}$$

$$t \to \infty \implies x^2 \to 2$$

Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter

Första ordningens:

$$y_{n+1} + a y_n = f_n \qquad n \geq 0$$

$$y_{n+1} = -a y_n + f_n = (-a)\left(-a y_{n-1} + f_{n-1}\right) + f_n =$$

$$= (-a)^2 y_{n-1} + (-a) f_{n-1} + f_n =$$

$$= (-a)^3 y_{n-2} + (-a)^2 f_{n-2} + (-a) f_{n-1} + f_n = \ldots$$

$$= (-a)^{n+1} y_0 + (-a)^n f_0 + (-a)^{n-1} f_1 + \ldots + f_n$$

$$\boxed{y_n = (-a)^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^k f_{n-k-1}}$$

$\longrightarrow$

Analogi: $y(x) = C e^{-ax} + \int_0^x f(t) e^{-a(x-t)} dt =$

$$y' + ay = f \quad \Big| \cdot e^{ax}$$

$$\underbrace{y'e^{ax} + ae^{ax}y}_{(ye^{ax})'} = fe^{ax}$$

$$ye^{ax} = \int f(x) e^{ax} dx$$

$$ye^{ax} = \int_0^x f(t) e^{at} dt + C$$

$$= C(e^{-a})^x + \int_0^x f(t)(e^{-a})^{x-t} dt$$

begynnelsevärdet

Jämför: $y_n = (-a)^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^k f_{n-k-1}$

och $y(x) = C(e^{-a})^x + \int_0^x f(t)(e^{-a})^{x-t} dt$

begynnelse-
värdet

en integral är analog till
en summa
MEN den går från 0 till x
jämfört med 0 och n-1

$\Rightarrow$ Lösningen till en första ordningens linjär differensekvation med konstanta koefficienter är analog till lösningen för motsvarande differentialekvation

Linearitet:

$$L : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ linjära rum

$(+, \lambda)$
axiom

Ekvation: $Lu = f$

$$\underbrace{u \in \mathcal{U}}_{?}, \underbrace{f \in \mathcal{V}}_{\text{given}}$$

SATS: Den allmänna lösningen (alla lösningar) till $Lu = f$ är

$u = u_{hom} + u_{part}$, där

$\boxed{L \text{ linjär}}$

u_{hom} är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $Lu = 0$ och u_{part} är en partikulär-lösning till den inhomogena ekvationen

Exempel: $y' + y = e^x$

Homogen: $y' + y = 0 \quad r + 1 = 0 \quad r = -1$

$$y_{hom}(x) = Ce^{-x}$$

Inhomogen: $y_{part}(x) = Ae^x \quad Ae^x + Ae^x = e^x$

$A = \frac{1}{2} \quad y_{part}(x) = \frac{1}{2}e^x$

$$y_{allm.}(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

BEVIS: Två saker att visa

(1) $u \overset{?}{=} u_{hom} + u_{part}$ lösning

$$Lu = \overbrace{\underbrace{Lu_{hom}}_{=0} + \underbrace{Lu_{part}}_{=f}}^{\text{linearitet}} = 0 + f = f$$

(2) Om u är en lösning så ? $\exists\, u_{hom(1)}$ s.a. $u = u_{hom(1)} + u_{part}$

Tag $u - u_{part}$:

$$L(u - u_{part}) = \underbrace{Lu}_{=f} - \underbrace{Lu_{part}}_{=f} = 0 \quad \text{Linearitet } *$$

$\Rightarrow$ $u - u_{part} = u_{hom(1)}$ är en lösning till den homogena ekvationen

$*$ $L(u - u_{part}) = Lu + L((-1) \cdot u_{part}) =$

$= Lu - L(u_{part})$

linearitet

Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter:

för enkelhetens skull: andra ordningens

$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = f_n$, $b \neq 0$
($b = 0$: första ordningens)

Analogin: e^{ax} ersätts av a^n (vi såg det i 1:a ordningens)
e^{rx} $\boxed{r^n}$

Karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ r_1, r_2 rötter
(notis: ej samma a)

(Ansats: $r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0$
$r^n \underbrace{(r^2 + ar + b)} = 0$)

(1) $r_1 \neq r_2, \in \mathbb{R}$
(2) $r_1 = r_2$
(3) $r_1 \neq r_2, \notin \mathbb{R}$

<u>SATS:</u> $y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$
$b \neq 0$

r_1, r_2 lösningarna till k.e. $r^2 + ar + b = 0$

$\Rightarrow$ Den (reella) allmänna lösningen till
$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0$ ges av

(1) $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ om $r_1 \neq r_2$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

(2) $C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n = (C_1 + C_2 n) r_1^n$ om $r_1 = r_2 (\in \mathbb{R})$

(3) för $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ $r_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi} = \rho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ $\rightarrow$

$\rho^n (C_1' \cos n\varphi + C_2' \sin n\varphi)$

OBS C_1', C_2' godtyckliga reella konstanter i (1), (2)

<u>BEVIS</u>: ① ? lösningar ② ? <u>alla</u> lösningar

(1) (3) $r_1 \neq r_2$

$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$? lösning ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ i fall (1); $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ i fall (3))

$r_{1,2}^n$, sätt in i ekvationen:

$$r_{1,2}^{n+2} + a r_{1,2}^{n+1} + b r_{1,2}^{n} = r_{12}^n \overbrace{(r_{1,2}^2 + a r_{1,2} + b)}^{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ r_1^n <u>o</u> r_2^n lösningar; pga lineariteten

$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = 0$

? alla lösningar fås ur den formeln

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0 \quad \left(\overset{b \neq 0}{\Rightarrow} r_1, r_2 \neq 0 \right)$$

y_0, y_1 givna $\Rightarrow \exists!$ lösning

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ (med just dessa y_0, y_1)

$\rightarrow$

$y_2 = -ay_1 - by_0$
$y_3 = -ay_2 - by_1$
$y_4 = -ay_3 - by_2 \quad \ldots$

$? \; \exists \; c_1, c_2$ s.a. $\quad c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = \begin{cases} y_0 & n=0 \\ y_1 & n=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1 \end{cases} \qquad \text{LES}$$

$? \; \exists$ entydig lösning

determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$

$\Rightarrow \exists !$ lösning till det LES

$\Rightarrow \exists ! \; c_1, c_2$ s.a.

$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ ger precis lösningen med begynnelsevillkor y_0, y_1

Givet y_0, y_1 har vi två lösningar:

$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, där c_1, c_2 fås ur det LES

samt $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ där $y_{n+2} = -ay_{n+1} - by_n \; (y_0, y_1)$ två villkor som uppfyller begynnelse-villkoren $\longrightarrow$

Entydighet (givet y_0, y_1 finns bara ett sätt att gå vidare)

$\Longrightarrow$ de två lösningarna måste sammanfalla

$$\Longrightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{C_1 r_1^n + C_2 r_2^n\}_{n=0}^{\infty}$$ för C_1, C_2 ur LES

(2) $r_1 = r_2$ $(\neq 0)$

$$(C_1 + C_2 n) r_1^n$$

$$\underbrace{(C_1 + C_2(n+2)) r_1^{\cancel{n+2}\,2}}_{y_{n+1}} + a\underbrace{(C_1 + C_2(n+1)) r_1^{\cancel{n+1}}}_{y_{n+1}} +$$

$$+ b(C_1 + C_2 n) \cancel{r_1^n} \overset{?}{=} 0$$

$$C_1 \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} + C_2 (nr_1^2 + 2r_1^2 + anr_1 + ar_1 + bn) =$$

$$= 0 + C_2 n\overbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}^{=0} + C_2 r_1 (2r_1 + a)$$

r_1 dubbelrot till $r^2 + ar + b = 0$

$\Longrightarrow$ r_1 rot till $2r + a = 0$

eller: $2r_1 = r_1 + r_2 = -a$

$\longrightarrow$

? alla lösningar ges av formeln

y_0, y_1 ? $\exists\, C_1, C_2$ som ger y_0, y_1

$n=0$ $(C_1 + C_2 \cdot 0) r_1^0 = y_0 \Rightarrow C_1 = y_0$

$n=1$ $(C_1 + C_2) r_1 = y_1 \Rightarrow C_2 = \ldots \;/(r_1 \neq 0)$

(3) $y_{complex} \overset{= y_c}{}$ lösning

$y_c = \text{Re}\, y_c + i\, \text{Im}\, y_c$

L linjär operator med (konstanta) reella koefficienter

$L y_c = 0 = L(\text{Re}\, y_c + i\, \text{Im}\, y_c) =$

$= \underbrace{L(\text{Re}\, y_c)}_{\text{reellt}} + i \underbrace{L(\text{Im}\, y_c)}_{\text{reellt}} = 0$

$\Rightarrow L(\text{Re}\, y_c) = 0$ och $L(\text{Im}\, y_c) = 0$

$0 \neq r_1 = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ty $r^2 + \underbrace{a r + b}_{\text{reella}} = 0$

$0 \neq r_2 = \rho(\cos\varphi - i \sin\varphi)$ $\Rightarrow r_1 = \bar{r}_2$

(*) $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 r_1^n + C_2 \bar{r}_1^n$ lösning

$r_1^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \;\|$ $\longrightarrow$

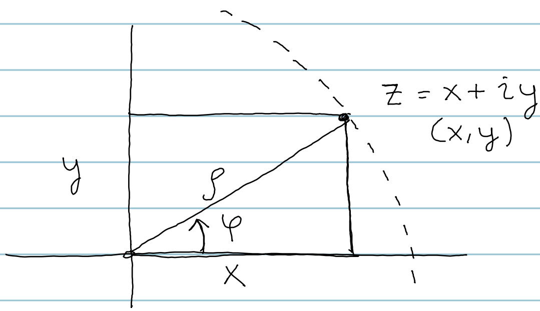
$$(*) = \rho^n\left(C_1 \cos n\varphi + iC_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi + iC_2(-\sin n\varphi)\right) = \varphi^n\left(K_1 \cos n\varphi + K_2 \sin n\varphi\right)$$

$K_1 = C_1 + C_2$

$K_2 = iC_1 \cancel{+} - iC_2$

C_1, C_2 kan väljas s.a. K_1, K_2 blir reella

lös LES $\quad C_1 = \bar{C_2}$



$\mathbb{C}$

$\boxed{z \neq 0}$

$x = \operatorname{Re} z$

$y = \operatorname{Im} z$

(ρ, φ) polära koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

$z = 0$

$\Longleftrightarrow \rho = 0$

x, y givna

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = ?$

φ ej entydigt bestämd

t.ex.

Man får bestämma intervall $\varphi \in [0, 2\pi)$

x, y:s tecken bestämmer kvadranten

$x, y > 0$ I $\quad x < 0, y > 0$ II

$x > 0, y < 0$ IV $\quad x, y < 0$ III

$x \neq 0: \quad \frac{y}{x} = \tan \varphi$

$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ I kv.

$\arctan \frac{y}{x} + \pi$ II kv

$\arctan \frac{y}{x} + \pi$ III kv

? $(\neq \arctan \frac{y}{x})$ IV kv

$\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow$

$$r_1^2 = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 =$$

$$= \rho^2\Big(\overbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}^{\cos 2\varphi} + i\,\overbrace{2\cos\varphi\sin\varphi}^{\sin 2\varphi}\Big)$$

---

17 | 9 b) $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$

$r^2 - 7r + 10 = 0$

$(r-2)(r-5) = 0$

$r_1 = 2, \quad r_2 = 5$

$\Rightarrow$ allmänna lösningen

$$y_{hom} = C_1 2^n + C_2 5^n$$

9f) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 8y_n = 0$

$r^2 + 4r + 8 = 0$

$(r+2)^2 + 4 = 0$

$r_{1,2} = -2 \pm i2$

Komplex lösning: $y_{hom,\mathbb{C}} =$

$$= C_1 2^n(-1+i)^n + C_2 2^n(-1-i)^n$$

$r_1 = -2 + 2i$

$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\longrightarrow$

$$r_1 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ II kvadranten (Re < 0, Im > 0

$$\operatorname{arccot}\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

Reell lösning: $$y_{hom,r} = C_1(2\sqrt{2})^n\cos\frac{3n\pi}{4} + C_2(2\sqrt{2})^n\sin\frac{3n\pi}{4}$$

$$\boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

13

$y'' + \ldots$ begynnelsevärdesproblem
$y(0) = \ldots$ (Cauchys ...)
$y'(0) = \ldots$

$y(0) = \ldots$ $y(1) = \ldots$ randvärdesproblem

Uppg. 13. A, B spelare
$\underline{k}$ kronor totalt
vid varje steg vinner A (en krona från motståndaren) med sannolikhet $\underline{p}$, och B med sannolikhet $q = 1 - p$

P_n sannolikheten för att A blir ruinerad om A hade $\underline{n}$ kr i början
$0 \le n \le k$ →

$p_n = ?$

Vid första steget:

$$\begin{tikzcd} & n+1 \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ n & n-1 \end{tikzcd}$$

$$p_n = p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1}$$

$p_0 = 1 \qquad p_k = 0$

randvärdesproblem

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n$$

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = \Delta(y_{n+1} - y_n) =$$

$$= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$