Föreläsning (1)
29/10-13

MATEMATISK ANALYS FORTSÄTTNING

Föreläsare: Peter Kumlin

Böcker: Kolla kurshemsidan

KURSINNEHÅLL:

- differentialekvationer

$$y' = y^2 \cdot e^x$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

- Taylorutvecklingar

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$

- Talföljder, differensekvationer, iterationer

$x_1, x_2, \ldots$

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n & n = 1, 2, \ldots \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 1, 2, \ldots$ (iterationer)

x_1 givet, f given

- serier $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

potensserier $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} x^k$

- funktionsföljder

$f(x_1), f(x_2), \ldots$

- Funktionsserier

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

likformig konvergens

- flervärda funktioner

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} \quad (x,y) \neq (0,0)$

DIFFERENTIALEKVATIONER

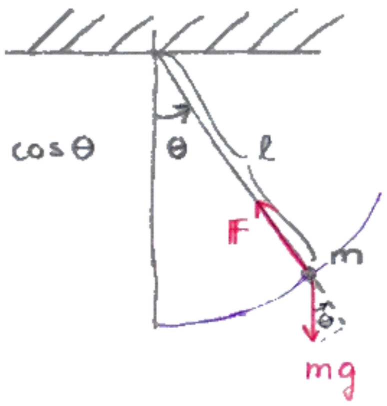
Föreläsning (2)
29/10-13

Matematiska modeller av dynamiska processer är ofta differentialekvationer

- klassificering
- metoder för att få explicita/analytiska lösningar
- existens/entydighetssatser
- numeriska metoder för att bestämma approximativa lösningar

Pendelekvationen

$|\mathbb{F}| = mg\cos\theta$



Masspunktens position vid tiden t
$(x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = \ell \sin(\theta(t)) \\ y(t) = -\ell\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

Newtons rörelselag:

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \mathbb{F} + (0, -mg) \overset{?}{=} \qquad (*)$$
$$= (-mg\cos\theta(t)\sin\theta(t),\ mg\cos^2(\theta(t)) - mg)$$

där $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$

Derivera

$$\begin{cases} \dot{x} = \ell\cos\theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = \ell\sin\theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\ell\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \ell\cos\theta \cdot \ddot{\theta} \\ \ddot{y} = \ell\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \ell\sin\theta \cdot \ddot{\theta} \end{cases}$$

Insättning i (*) ger:

$$\begin{cases} m(-\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \ell\cos\theta\cdot\ddot{\theta}) = -mg\cos\theta\cdot\sin\theta & \dots (1) \\ m(\ell\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \ell\sin\theta\cdot\ddot{\theta}) = mg\cos^2\theta - mg & \dots (2) \end{cases}$$

Multiplicera (1) med $\cos\theta$ och (2) med $\sin\theta$ och addera ledvis

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

dvs $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$

Differentialekvation av ordning n

$$f(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$$

där f är en funktion av $n+2$ variabler definierad i något område $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$

Ofta kan man lösa ut $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = g(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

En lösning $y(x)$ på intervall I är en n gånger deriverbar funktion sådan att

$$y^{(n)}(x) = g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad \text{alla } x \in I$$

Vi säger att (*) är linjär om

$$g(x,y,\dots,y^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} + b(x)$$

Om $a_k(x) = a_k$, $k = 0,\dots,n-1$, konstanter så kallas (*) linjär differentialekvation av ordning n med konstanta koefficienter. Den kallas homogen, annars inhomogen

Differentialekvation av ordning 1

① $y' = f(x)$, f kontinuerlig

$\Longrightarrow \quad y(x) = F(x) + C$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$

och C godtycklig konstant

② $(*)$ $y' + g(x)y = f(x)$, f, g kontinuerliga

Metod: Integrerande faktor

Välj en primitiv funktion $G(x)$ till $g(x)$

Multiplicera $(*)$ med $e^{G(x)}$

$$\underbrace{\underbrace{e^{G(x)} y'(x)}_{\frac{d}{dx} y(x)} + \underbrace{e^{G(x)} g(x)}_{\frac{d}{dx} e^{G(x)}} \cdot y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{G(x)} \cdot y(x)\right)} = e^{G(x)} f(x)$$

Vi får

$$e^{G(x)} \cdot y(x) = \int e^{G(x)} f(x)\, dx + C$$

$$y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} f(x)\, dx + Ce^{-G(x)}$$

Ex. $xy' - 2y = x^3 \cos x$, $x > 0$

$y' + \left(-\frac{2}{x}\right) y = x^2 \cos x$

Här är $g(x) = -\frac{2}{x}$, $f(x) = x^2 \cos x$

$$G(x) = \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2 \ln x \overset{x>0}{=} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) , \quad x > 0$$

Multiplicera $(*)$ med $e^{G(x)} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x^2} y'(x) - \frac{2}{x^3} y(x) = \cos x$$

Alltså $\frac{1}{x^2} y(x) = \sin x + C$ $\longrightarrow$

Föreläsning (5)
29/10-13

dvs
$$y(x) = x^2(\sin x + C), \quad x > 0$$

③ (*) $g(y)\,y' = f(x)$ $\qquad$ f, g kontinuerliga

g har konstant tecken

kallas separabel differentialekvation

Bestäm en primitiv funktion $G(y)$ till $g(y)$

$F(x)$ till $f(x)$

(*) har formen
$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x)) - F(x)\right) = 0$$

Alltså
$$G(y(x)) - F(x) = C$$
$$G(y(x)) = F(x) + C$$

G strängt monoton då g har konstant tecken

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Observera att (*) i allmänhet är en icke-linjär diff.ekv.

Ex. (*) $y' = y^2 e^x$ $\qquad$ 1:a ordningens diff.ekv

icke-linjär

Vi vill dividera med y^2

Notera att $y = 0$ är en lösning till (*)

Antag att $y(x) \neq 0 \quad \forall x$

$$\frac{1}{y^2}\,y' = e^x$$

Här är $g(y) = \frac{1}{y^2}$, $f(x) = e^x$

Vi har $G(y) = -\frac{1}{y}$

$F(x) = e^x$

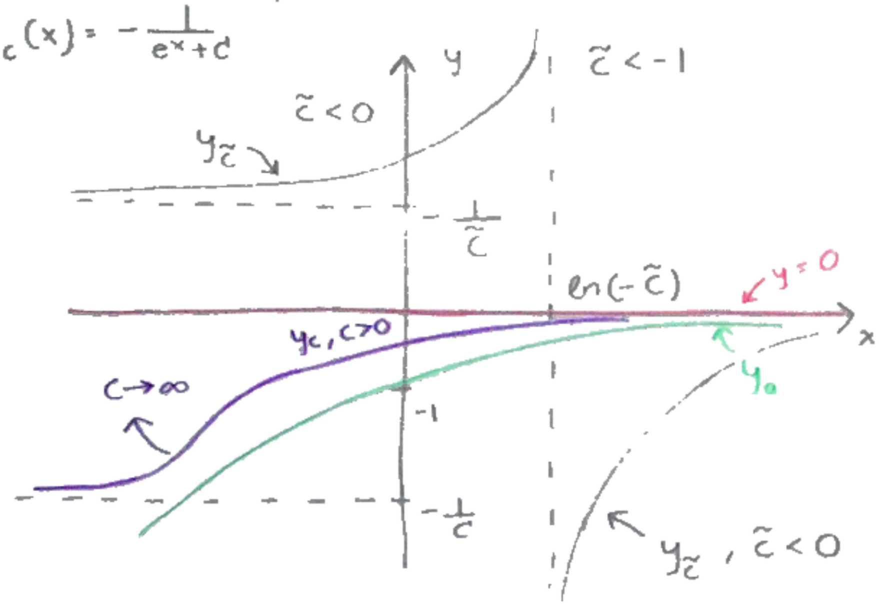
$\longrightarrow$

Föreläsning (6)
29/10 -13

Alltså $-\frac{1}{y(x)} = e^x + C$

dvs $y(x) = -\frac{1}{e^x + C}$ om $e^x + C \neq 0$

Sätt $y_c(x) = -\frac{1}{e^x + C}$



$c > 0$: $y_c(x) = -\frac{1}{e^x + c}$ $x \in \mathbb{R}$ $y_c(x)$

$c = 0$: $y_0(x) = -\frac{1}{e^x} < 0$

$\tilde{c} < 0$: $y_{\tilde{c}}(x) = \frac{1}{-\tilde{c} - e^x}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(-\tilde{c})\}$

Betrakta

$y' = \underbrace{g(x,y)}$ ger ett sk riktningsfält