TAYLORUTVECKLINGAR

Föreläsning (1)
7/11-13

$f^{(k)}$ kontinuerlig $k=0,1, \dots, n+1$ i ett intervall I

$\Longrightarrow$ $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$, $x \in I$

där

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$R_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} =$$

$$= O(x^{n+1})$$

för något ξ mellan 0 och x

$\xi = \theta x$, $\theta \in [0,1]$

Definition av $O(x^n)$

$h(x) = O(x^n)$ om det finns $M>0$ och $\varepsilon > 0$ så att $|h(x)| \le M|x|^{n+1}$, $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

dvs. $h(x) = x^n \cdot B(x)$ där $B(x)$ begränsad funktion i omgivning av $x=0$

Räkneregler $x \to 0$

- $h(x) = O(x^n) \Longrightarrow h(x) = O(x^m)$ $\forall m$ $0 \le m \le n$
- $C\,O(x^n) = O(x^n)$
- $x^m O(x^n) = O(x^{n+m})$, $n \ge 0$, $n+m \ge 0$
- $O(x^n) - O(x^n) = O(x^n)$ (Tänk $A O x^n - B O(x^n)$ där $A \ne B$; $A, B \in \mathbb{R}$)
- $O(x^n) \cdot O(x^m) = O(x^{n+m})$ $n, m \ge 0$
- $(O(x^n))^m = O(x^{n \cdot m})$

Ex. $$\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{x}\,dx$$

Standardutveckling

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{e^{\theta t}}{4!}t^4$$

för något $\theta = \theta(t) \in [0,1]$, $t \in \mathbb{R}$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{e^{\theta x^2}}{4!}x^8$$

och $$\frac{e^{x^2}-1}{x} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + \frac{e^{\theta x^2}}{4!}x^7$$

HL existerar för $x=0$

och $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = 0$$

Vi har $$\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{x} = \underbrace{\int_0^1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right)dx}_{\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{36}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{36}} + \int_0^1 \frac{e^{\theta x^2}}{4!}x^7\,dx$$

$\theta = \theta(x^2)$

$$\frac{1}{24}x^7 \le \frac{e^{\theta x^2}}{4!}x^7 \le \frac{e}{24}x^7$$

Alltså $$\int_0^1 \frac{1}{24}x^7 dx \le \int_0^1 \frac{e^{\theta x^2}}{4!}dx \le \int_0^1 \frac{e}{24}x^7 dx$$

dvs $$\frac{1}{24\cdot 8} \le \int_0^1 \frac{e^{\theta x^2}}{4!}dx \le \frac{e}{24\cdot 8}$$

Detta ger oss att

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{x}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + j$$

där $$\frac{1}{24\cdot 8} \le j \le \frac{e}{24\cdot 8}$$

Föreläsning (3)
7/11-13

Standardutvecklingar:

e^x, $\sin x$, $\cos x$

Remark: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Om standardutvecklingen för e^x även gäller för e^{ix}

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots = \{i^2 = 1\}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots +$$

$$+ i\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right) = \cos x + i\sin x$$

$\ln(1+x) = f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4} = (-1)^3\, 3!\, \frac{1}{(1+x)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x)^n} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$$

Taylors formel ger

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \underbrace{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,\frac{x^n}{n!}}_{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n} +$$

Restterm

$$+ (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta = \theta(x) \in [0,1]$$

Alltså

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

Föreläsning (4)
7/11-13

ENTYDIGHETSSATS FÖR TAYLORUTVECKLINGAR

$f^{(k)}$ kontinuerlig $k=0,\dots,n+1$ på intervall I

$0 \in I$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + O(x^{n+1}) \quad x \to 0$

$\Rightarrow \quad a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad k=0,\dots,n$

BEVIS

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + O(x^{n+1})$$
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$0 = (a_0 - f(0)) + (a_1 - f'(0))x + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2}\right)x^2 + \dots +$$
$$+ \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n + O(x^{n+1}) \quad , \quad x \in I$$

Sätt $x=0$

Ger $a_0 = f(0)$

För $x \neq 0$ dividera med x

$$0 = (a_1 - f'(0)) + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2}\right)x + \dots +$$
$$+ \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^{n-1} + O(x^n)$$

Låt $x \to 0$ (Man deriverar i princip en gång i taget)

$a_1 = f'(0)$

P.s.s. fås $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2}, \dots, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$\square$

Åter till $\ln(1+x)$ $\left(= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \right.$
$$\left. + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \right)$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1} = \frac{1-s^n}{1-s} \quad \text{om } s \neq 1$$

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + \ldots + s^{n-1} + \frac{s^n}{1-s}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 + (-t) + (-t)^2 + \ldots + (-t)^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t}, \quad t \neq -1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\right) dt =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt}_{\text{restterm}}$$

$$\frac{1}{1+\theta x} \cdot \int_0^x t^n\,dt =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1+\tilde{\theta} x}, \quad x > -1$$
$$\tilde{\theta} \in [0,1]$$

Ex.

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow\, x \to 0\pm \\ \pm\infty}} \cdot \left(\underbrace{e^{x+1}}_{\substack{\downarrow\, x\to 0 \\ e}} - \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow\, x \to 0 \\ e}}\right)$$

För $x \neq 0$

* Den låga exponenten är den viktiga eftersom vi går mot noll

$$\frac{1}{x}\left(e^{x+1} - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\left(e^{x+1} - e^{\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}]}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(e^{x+1} - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right) = \left\{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right\} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(e^{x+1} - e^{\frac{1}{x}(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3))}\right) = \frac{1}{x}\left(e^{x+1} - e^{1 - \frac{x}{2} + O(x^2)}\right) =$$

$$= \frac{e}{x}\left(e^x - e^{-\frac{x}{2} + O(x^2)}\right) = \left\{e^t = 1 + t + O(t^2), t \to 0\right\} =$$

$$= \frac{e}{x}\left((1 + x + O(x^2)) - (1 + (-\frac{x}{2} + O(x^2)) + O((-\frac{x}{2} + O(x^2))^2)\right) =$$

Föreläsning (6)
7/11-13

$$= \frac{e}{x}\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)x + O(x^2)\right) = \frac{3}{2}e + O(x) \longrightarrow \frac{3}{2}e \,,\; x \to 0$$

Alltså $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(e^{x+1} - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{3}{2}e$