

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, MVE700/TMA976
21 Augusti 2025, 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund, 072-858 67 87

Tentamen består av två delar (Del A och Del B) på sammanlagt 50 poäng.

På Del A krävs minst 8 poäng av 18 poäng för att resten av tentan skall rättas. Om 8 poäng på Del A inte uppnås så är tentan alltså automatiskt underkänd.

Alla svaren på frågorna i Del A skall prydligt sammanfattas på ett separat Lösblad, d.v.s. endast ett Lösblad skall användas för frågorna 1-7. **Enbart svar skall anges, inga lösningsgångar redovisas**. Om lösningar ändå presenteras så kommer dessa inte att tas i beaktande.

På de frågor med flera givna svarsalternativ så skall endast bokstäver anges som svar. Notera att flera svarsalternativ är möjliga. Alla skall anges för full poäng; 1 poäng ges dock om inte alla har angivits (men åtminstone ett korrekt). *Ett felaktigt svarsalternativ renderar automatiskt noll poäng på uppgiften*, även om de andra angivna svarsalternativen är korrekta, så undvik att gissa.

På frågorna i Del B skall samtliga steg (utom triviala beräkningar) redovisas i lösningarna. Skriv tydligt och redovisa vilka resultat/satser från kursen som du använder. Argument som inte redovisas ordentligt ger avdrag. Standardutvecklingar och standardgränsvärden får användas utan bevis.

Se till att **ditt namn, personnummer och din anonymiseringskod är tydligt nedskrivna på försättsbladet**.

Lägg lösningarna i korrekt ordning innan du lämnar in!

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Totalt 50 poäng, fördelade på 12 uppgifter (2 sidor). Inga hjälpmedel!

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

Del A

1. Bestäm lösningen $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ till initialvärdesproblemet (2p)

$$y(0) = 0, \quad e^{-x}y'(x) - y(x) = 1, \quad \text{för alla } x > 0.$$

2. Bestäm lösningen $y : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ till initialvärdesproblemet (2p)

$$y(1) = -1, \quad y'(x)y(x)^2 = x^2, \quad \text{för alla } x > 1.$$

3. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^2} \cdot x^{k^2}}{k(1 + e^{k^2})}$? (2p)

4. Lös $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x$. (3p)

5. Beräkna gränsvärdet (3p)

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) - \tan(x^2 + x^3)}{\sin(x) - x}$$

6. Beräkna gränsvärdet (3p)

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln(n)} \sum_{k=1}^n \ln(1 + k^2)$$

7. Vilka av följande serier konvergerar? (3p)

A) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{\ln(1+k)}$	B) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(1/k^2)}{\sqrt{k}}$	C) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{k^3 - k^2}$
D) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$	E) $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k) (\ln(\ln(k)))^2}$	

Del B

8. Existerar gränsvärdet (5p)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}?$$

9. Beräkna serien (6p)

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

10. Bestäm Taylor-polynomet kring $x = 0$ av ordning 11 för funktionen (5p)

$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

11. Visa att (8p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sin(x + \ln(1+x^2))} e^{-n|x|} dx = 2.$$

12. Visa att (8p)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

SOLUTIONS EXAM 3, 24/25 IN TMA976

PART A

1. $y(x) = e^{e^x - 1} - 1$.
 2. $y(x) = (x^3 - 2)^{1/3}$.
 3. $x \in (-e, e]$.
 4. $y(x) = e^{2x} - (1 + x)e^x$.
 5. $I = 6$.
 6. $J = 2$.
 7. A, D, E
-

PART B

Problem 8

Consider limits along the curves $(x, y) = (t, kt^2)$ for fixed $k \in \mathbb{R}$ as $t \rightarrow 0$. Then, after cancelling t^4 ,

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{kt^4}{t^4(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

For the actual limit to exist, it is necessary that all of these sub-limits attain the same value, independently of k , which clearly does not happen here.

Answer : No, the limit does not exist.

Problem 9

Note that

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = b_n - b_{n+1},$$

where

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right), \quad n \geq 2.$$

Hence, since $b_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, the telescoping property yields

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Answer : $S = \frac{3}{4}$.

Problem 10

Note that $f(0) = 0$, and

$$f'(x) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \mathcal{O}(x^{14})$$

Hence,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \mathcal{O}(x^{15})$$

so by uniqueness of the Taylor polynomial of order 7 at $x = 0$, we get

Answer: $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!}$.

Problem 11

Let

$$f(x) = e^{\sin(x + \ln(1+x^2))} \quad \text{and} \quad \rho_n(x) = ne^{-n|x|} = n\rho(nx),$$

where $\rho(x) = e^{-|x|}$. We wish to compute the limit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x/n)\rho(x) dx.$$

Fix $\varepsilon > 0$ and pick $R > 0$ such that

$$\int_{|x| \geq R} \rho(x) dx < \varepsilon.$$

Then,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/n)\rho(x) dx = \int_{-R}^R f(x/n)\rho(x) dx + \int_{|x| \geq R} f(x/n)\rho(x) dx$$

and

$$0 \leq \int_{|x| \geq R} f(x/n)\rho(x) dx \leq e \cdot \varepsilon,$$

since $|f(y)| \leq e$ for all $y \in \mathbb{R}$. Note that

$$f(x/n) \rightarrow f(0) \quad \text{uniformly on } [-R, R],$$

and thus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x/n)\rho(x) dx = f(0) \int_{-R}^R \rho(x) dx = f(0) \cdot 2(1 - e^{-R}).$$

We conclude that

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x/n)\rho(x) dx - 2f(0) \right| = e \cdot \varepsilon + 2e^{-R}.$$

Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, and R can be made arbitrarily large, we conclude that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x/n)\rho(x) dx = 2f(0) = 2.$$

Problem 12

First note that

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k}$$

for all $|x| < 1$, with uniform convergence on $[-(1-\varepsilon), (1-\varepsilon)]$ for all $\varepsilon > 0$. Hence, for every $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{1-\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{4k} \right) dx + \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{dx}{1+x^4} = A(\varepsilon) + B(\varepsilon).$$

Note that

$$0 \leq B(\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

and, due to the uniform convergence, allowing us to interchange summation and integration,

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{1-\varepsilon} x^{4k+1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{4k+1}}{4k+1}.$$

Hence,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{4k+1}.$$

Since the series on the right-hand side converges (albeit conditionally) at $x = 1$, Abel's lemma from the lecture notes tells us that the series defines a continuous function at $x = 1$, and thus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{4k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1}.$$