Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, MVE700/TMA976
17 Januari 2025, 14.00-18.00

Examinator: Michael Björklund, 072-858 67 87

Tentamen består av två delar (Del A och Del B) på sammanlagt 50 poäng.

På Del A krävs minst 8 poäng av 18 poäng för att resten av tentan skall rättas. Om 8 poäng på Del A inte uppnås så är tentan alltså automatiskt underkänd.

Svaren på frågorna i Del A skall prydligt sammanfattas på ett separat lösblad. **Endast svar skall anges, inga lösningsgångar redovisas**. Om lösningsgångar ändå presenteras så kommer dessa inte att tas i beaktande.

På de frågor med flera givna svarsalternativ så skall endast bokstäver anges som svar. Notera att flera svarsalternativ är möjliga. Alla skall anges för full poäng; 1 poäng ges dock om inte alla har angivits (men åtminstone ett korrekt). *Ett felaktigt svarsalternativ renderar automatiskt noll poäng på uppgiften*, även om de andra angivna svarsalternativen är korrekta, så undvik att gissa.

På frågorna i Del B skall samtliga steg (utom triviala beräkningar) redovisas i lösningarna. Skriv tydligt och redovisa vilka resultat/satser från kursen som du använder. Standardutvecklingar och standardgränsvärden får användas utan bevis.

Se till att ditt namn, personnummer och din anonymiseringskod är **tydligt** nedskrivna på försättsbladet. **Lägg lösningarna i korrekt ordning** innan du lämnar in.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Totalt 50 poäng, fördelade på 11 uppgifter (2 sidor). Inga hjälpmedel!

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

Del A

1. Lös $y(1) = 0, \;\; xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{x}, \;\; x > 0.$ (2p)

2. Lös $y(0) = 0, \;\; y'(x)(y(x)^2 + 2y(x) + 1) = x.$ (2p)

3. För vilka reella x konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{k=10}^{\infty} \frac{x^{k+k^3}}{\sqrt{k}}$? (2p)

4. Lös $y(0) = y(1) = 0, \;\; y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x.$ (3p)

5. Beräkna gränsvärdet (3p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + x^2) - \ln(1 + x) - 3\arctan(x^2)/2}{(\ln(1 + x))^2 - x^2}$$

6. Vilka av följande serier konvergerar? (3p)

$$\boxed{A)\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{\sqrt{k}}} \quad \boxed{B)\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(1/k)}{\sqrt{k}}} \quad \boxed{C)\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 2^k}{k^2 + 2^k}}.$$

$$\boxed{D)\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+5}\right)} \quad \boxed{E)\; \sum_{k=1} \left(\sqrt{k^2+1} - k\right)}.$$

7. Vilka av följande identiteter/olikheter är korrekta? (3p)

$$\boxed{A)\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(k^2+3k+2)} - e^{-(k^2+k)}\right) = -1} \quad \boxed{B)\; \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{C)\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(k^2+3k+2)} - e^{-(k^2+k)}\right) = 1} \quad \boxed{D)\; \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = 1}$$

$$\boxed{E)\; \ln(1 + x^2) \geq x^2 - \frac{x^4}{2} \text{ för alla } x \geq 0}.$$

Del B

8. Definiera

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 2^k} \cos(x^k), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Visa att:

a) $f(x)$ konvergerar absolut för alla $x \in (-\infty, \infty)$. (2p)

b) f är en kontinuerlig funktion på $(-\infty, \infty)$. (4p)

c) f är en kontinuerligt deriverbar funktion på $(-2, 2)$. (9p)

9. Beräkna gränsvärdet:

$$I = \lim_{n\to\infty} e^{-(n^2+3n)} \sum_{k=1}^{n} k e^{k^2+k}.$$

(10p)

10. Beräkna gränsvärdet

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} (\cos x)^n \, dx.$$

(3p)

11. Existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{3/2} \sin(x^2|y|^{3/2})}{(2x^4+3y^4)^{3/4}} \, ?$$

Om ja, beräkna gränsvärdet. (4p)

SOLUTIONS EXAM 1, 24/25 IN TMA976

Part A

1. $y(x) = \frac{x-1}{x^2}$.
2. $y(x) = \left(\frac{3x^2}{2} + 1\right)^{1/3} - 1$.
3. $|x| < 1$.
4. $y(x) = \frac{1}{2}e^x(x-1)x$.
5. $\frac{1}{2}$.
6. A, D.
7. A, B, E.

Part B

Problem 8

a+b) We write

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad u_k(x) = \frac{(-1)^k}{k \cdot 2^k}\cos(x^k).$$

Since

$$|u_k(x)| = \frac{1}{k \cdot 2^k}|\cos(x^k)| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \text{for all } x \in \mathbb{R},$$

and thus $\|u_k\|_\infty \leq 2^{-k}$, we see that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty, \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

In particular, $f(x)$ converges absolutely for all x, and by Weierstrass M-test, the series converges uniformly on $(-\infty, \infty)$. Since each u_k is continuous on $(-\infty, \infty)$, and continuity is inherited by uniform limits, we conclude that f is continuous.
c) By a result from the course (that has been covered numerous time), to prove that

f is continuously differentiable on $(-2, 2)$, it suffices to show that for every $\delta > 0$, the derivatives of the partial sums:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\sin(x^k)}{2^k}$$

converges uniformly on $[-(2-\delta), (2-\delta)]$. To prove this, note that

$$|u_k'(x)| = \frac{|\sin(x^k)|}{2^k} = \frac{|\sin(x^k)|}{|x|^k} \cdot \left|\frac{x}{2}\right|^k \leq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^k,$$

for all $|x| \leq 2 - \delta$. Hence

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k'\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^k < \infty,$$

so it readily follows from the Weierstrass M-test that $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ converges uniformly on the interval $[-(2-\delta), (2-\delta)]$ for all $\delta > 0$.

Problem 9

Let $f(x) = xe^{x^2+x}$, and define

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad n \geq 1.$$

Note that f is an increasing positive function on $[1, \infty)$, and thus

$$s_n \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq s_n + A_n, \quad \text{where } A_n = f(n+1) - f(1).$$

Furthermore,

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} xe^{x^2+x}\, dx = e^{-1/4} \int_1^{\infty} xe^{(x+1/2)^2}\, dx$$

$$= e^{-1/4} \int_{3/2}^{n+3/2} (x - 1/2)e^{x^2}\, dx = e^{-1/4} \int_{3/2}^{n+3/2} xe^{x^2}\, dx - B_n,$$

where $B_n = \frac{e^{-1/4}}{2} \int_{3/2}^{n+3/2} e^{x^2}\, dx$. Moreover,

$$\int_{3/2}^{n+3/2} xe^{x^2}\, dx = \frac{e^{-1/4}}{2} \int_{9/4}^{(n+3/2)^2} e^u\, du = \frac{e^2}{2} e^{n^2+3n} - \frac{e^2}{2},$$

so it follows from the inequalities above that

$$I = \lim_{n\to\infty} e^{-(n^2+3n)} s_n = \frac{e^2}{2},$$

provided

$$\lim_{n\to\infty} e^{-(n^2+3n)} A_n = \lim_{n\to\infty} e^{-(n^2+3n)} B_n = 0.$$

The limit for A_n is trivial. For B_n, we note that

$$\int_{3/2}^{n+3/2} e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{9/4}^{(n+3/2)^2} \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_{9/4}^{n^2} \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du + \frac{1}{2}\int_{n^2}^{(n+3/2)^2} \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\leq \frac{1}{2}e^{n^2} + \frac{1}{2}\int_{n^2}^{(n+3/2)^2} \frac{e^{(n+3/2)^2}}{e^{n^2/2}}\,du$$

$$\leq \frac{1}{2}e^{n^2} + \frac{1}{2}\frac{e^{(n+3/2)^2}}{e^{n^2/2}}(3n+9/4).$$

Hence,

$$\lim_{n\to\infty} e^{-(n^2+3n)}B_n = 0,$$

and we are done, so the right answer is

$$\boxed{I = \frac{e^2}{2}}.$$

Problem 10

Fix $\varepsilon > 0$. Then there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that

$$\max\{|\cos(x)|^n \,:\, \varepsilon \leq x \leq \pi - \varepsilon\} \leq (1-\delta(\varepsilon))^n, \quad \text{for all } n.$$

Hence, the sequence $f_n(x) = \cos(x)^n$ converges uniformly to $f(x) = 0$ on $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, and thus

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (\cos(x))^n\,dx = 0.$$

Since $|\cos(x)| \leq 1$ for all x, we have

$$\Big|\int_0^{\varepsilon} (\cos(x))^n\,dx\Big| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad \Big|\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} (\cos(x))^n\,dx\Big| \leq \varepsilon,$$

for all n. Hence,

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_0^{\pi} (\cos(x))^n\,dx\Big| \leq 2\varepsilon + 0.$$

Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, we conclude that the limit is zero.

Problem 11

The limit is clearly zero along the lines $x = 0$ or $y = 0$, so let us from now on assume that x and y are both non-zero, and write

$$\frac{|x|^{3/2}\sin(x^2|y|^{3/2})}{(2x^4+3y^4)^{3/4}} = \frac{|x|^{3/2}x^2|y|^{3/2}}{(2x^4+3y^4)^{3/4}} \cdot \frac{\sin(x^2|y|^{3/2})}{x^2|y|^{3/2}} = \frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(2x^4+3y^4)^{3/4}} \cdot \frac{\sin(x^2|y|^{3/2})}{x^2|y|^{3/2}}$$

To prove that the limit exists (and is zero), it suffices (since $|\sin(z)| \leq |z|$ for all non-zero real z), to show that

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(2x^4+3y^4)^{3/4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2|^{7/4}|y^2|^{3/4}}{((\sqrt{2}x^2)^2+(\sqrt{3}y^2)^2)^{3/4}} = 0.$$

After making the substitution $u = \sqrt{2}x^2$ and $v = \sqrt{3}y^2$, it thus suffices to show that

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{|u|^{7/4}|v|^{3/4}}{(u^2+v^2)^{3/4}} = 0.$$

Switching to polar coordinates:

$$\frac{|u|^{7/4}|v|^{3/4}}{(u^2+v^2)^{3/4}} = r^{5/2-3/2}|\cos(\theta)|^{7/4}|\sin(\theta)|^{3/4}$$

which clearly tends to zero uniformly in θ as $r \to 0$.