Matematisk Analys, Fortsättning (F/TM)
TMA976

17 augusti 2023, 8.30-12.30

Examintor: Michael Björklund, 072-858 67 87

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT.

Totalt 50 poäng, fördelade på <u>6 uppgifter</u> (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Lös differentialekvationen

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x + e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Du får använda att $\int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt = -xe^{-x}$ utan bevis. (6p)

2. Lös differentialekvationen

$$xy'(x) = y(x)^2 - 3y(x) + 2, \quad y(1) = 0.$$

Ange även definitionsmängden för lösningen. (6p)

3. För vilka a existerar gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \tan(x) + a \cdot \ln(1+x^3)}{\sin^3(\tan(x))(1-\cos(x))}?$$

Beräkna även gränsvärdena för dessa a. Standardutvecklingar för $\sin, \cos$ och $\ln$ får användas utan bevis, samt att $\tan(x) = x + x^3/3 + 2x^5/15 + \mathcal{O}(x^7)$ då $x \to 0$. (10p)

4. Visa olikheten

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \geq \frac{-\ln(-\ln(x))}{e \ln 2}, \quad \text{for alla } x \in (e^{-1}, 1).$$

(10p)

5. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k} + k(-1)^k}?$$

Avgör även huruvida konvergensen är absolut eller betingad. (8p)

6. Beräkna integralen

$$I_5 := \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx.$$

LEDTRÅD: För $\delta > 0$, definiera funktionen $J_\delta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ enligt

$$J_\delta(y) = \int_\delta^1 \frac{x^y - 1}{\ln x}\,dx, \quad y \geq 0.$$

Vad är derivatan av J_δ? Observera att

$$J_\delta(1) = J_\delta(0) + \int_0^1 J'_\delta(y)\,dy \quad \text{och} \quad I_5 = \lim_{\delta\to 0^+} J_\delta(1).$$

Redogör noga för hur du (rigoröst) beräknar derivatan J'_δ. (10p)

Detta är ett studentgjort lösningsförslag och har inte kollats av examinatorn

FORTSÄTTNINGSANALYS 230817

1. Alternativ 1. (Förskjutningsmetoden, "Mickes metod")

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{x} + e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Karakteristisk ekvation: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (r-2)(r-1) = 0$$

Rötter $r_1 = 2$, $r_2 = 1$

Låt $z(x) = y'(x) - r_1 y(x) = y'(x) - y(x)$ (r_2 funkar också)

så att

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \underbrace{y''(x) - y'(x)}_{=z'(x)} - 2\underbrace{(y'(x) - y(x))}_{=z(x)}$$

$$= z'(x) - 2z(x).$$

Notera $z(0) = y'(0) - y(0) = 0$. Ekvationen kan skrivas

$$z'(x) - 2z(x) = e^{x} + e^{2x}, \quad z(0) = 0$$

Denna löser vi med integrerande faktor e^{-2x}:

$$z'(x)e^{-2x} - 2z(x)e^{-2x} = e^{-x} + 1$$

$$\Rightarrow \left(z(x)e^{-2x}\right)' = e^{-x} + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(z(t)e^{-2t}\right)' dt = \int_0^x (e^{-t} + 1)\, dt$$

$$\Rightarrow z(x)e^{-2x} - \underbrace{z(0)}_{=0} e^{-2\cdot 0} = \left[t - e^{-t}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow z(x)e^{-2x} = x - e^{-x} + 1$$

$\Rightarrow z(x) = (x+1)e^{2x} - e^x$

Vi löser nu

$$z(x) = y'(x) - y(x) = (x+1)e^{2x} - e^x, \quad y(0) = 0$$

Denna gång blir den integrerande faktorn e^{-x}:

$$y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = (x+1)e^x - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x (y(t)e^{-t})'\,dt = \int_0^x \underbrace{((t+1)e^t - 1)}_{\text{partial-integration}}\,dt$$

$$\Rightarrow y(x)e^{-x} - \underbrace{y(0)e^{-0}}_{=0} = \left[te^t - t\right]_0^x$$

$$\Rightarrow y(x)e^{-x} = xe^x - x$$

$$\Rightarrow y(x) = xe^{2x} - xe^x$$

<u>Alternativ 2.</u> (Konstantbestämning, "Perssan Böiers metod")
Karakteristisk ekvation $r^2 - 3r + 2 = 0$ med lösningar $r_1 = 1$ och $r_2 = 2$. Detta ger homogenlösning

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

Då högerledstermerna har argument motsv. de karakteristiska rötterna (r_1x el. r_2x) krävs ansats av högre grad än högerledets grad framför exponentialtermerna (som är 0, d.v.s. konstant). I detta fall räcker

$$y_p(x) = (a_1x + \tilde{b}_1)e^x + (a_2x + \tilde{b}_2)e^{2x}.$$

Tillsammans:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} + (a_1x + \tilde{b}_1)e^x + (a_2x + \tilde{b}_2)e^{2x}$$
$$= (a_1x + b_1)e^x + (a_2x + b_2)e^{2x}$$

Derivatorna blir

$$y'(x) = (a_1 x + a_1 + b_1)e^x + (2a_2 x + a_2 + 2b_2)e^{2x}$$

$$y''(x) = (a_1 x + 2a_1 + b_1)e^x + 4(a_2 x + a_2 + b_2)e^{2x}$$

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x + e^{2x}$$

$$\Rightarrow -a_1 e^x + a_2 = e^x + e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ a_1 + b_1 + a_2 + 2b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

Alltså, $y(x) = xe^{2x} - xe^x$.

Kontrollera genom att beräkna derivator och stoppa in i ekvationen och begynnelsevillkor.

2. $xy'(x) = y(x)^2 - 3y(x) + 2, \; y(1) = 0$

Ekvationen är separabel. På separabel form:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2 - 3y(x) + 2} = \frac{1}{x}$$

Integrera från 1 (eftersom begynnelsevillkoret är där) till x:

$$\int_1^x \frac{y'(t)}{y(t)^2 - 3y(t) + 2}\,dt = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

I den vänstra integralen substituerar vi $y = y(t)$. Då blir $dy = y'(t)\,dt$ och gränserna $y(1)=0$ till $y(x)$:

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{y^2-3y+2}\,dt = \left[\ln|t|\right]_1^x$$

Notera

$$\frac{1}{y^2-3y+2} = \frac{1}{(y-2)(y-1)} = \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}$$ (Partial bråks-uppdelning)

$$\Rightarrow \int_0^{y(x)} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \ln|x|$$

$$\left[\ln|y-2| - \ln|y-1|\right]_0^{y(x)} = \ln|x|$$

$$\ln\left|\frac{y(x)-2}{y(x)-1}\right| - \ln\left|\frac{-2}{-1}\right| = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y(x)-2}{y(x)-1}\right| = 2|x|$$

Vi börjar i $y=0$. Division med 0 när $y=1$, så vi måste ha $y(x) \leq 1$. Då är $\frac{y(x)-2}{y(x)-1} > 0$ och

$$\frac{y(x)-2}{y(x)-1} = 2|x|$$

$$\Rightarrow y(x) - 2 = 2|x|(y(x)-1)$$

$$\Rightarrow y(x)(1-2|x|) = 2(1-|x|)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2(1-|x|)}{1-2|x|}$$

Vi började i $x=1$ och får division med noll när $x=\frac{1}{2}$, så vi måste ha $x>\frac{1}{2}$. Därför är lösningen

$$y(x)=\frac{2(1-x)}{1-2x}, \text{ giltig för alla } x>\frac{1}{2}.$$

3. Vi tittar först på nämnaren. Den första nollskilda termen i nämnaren kommer avgöra hur långt vi behöver utveckla täljaren. Här räcker $\sin(x)=x+\mathcal{O}(x^3)$, $\tan(x)=x+\mathcal{O}(x^3)$ och $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)$. Vi får

$$\sin^3(\tan(x))=(\sin(\tan(x)))^3=(\sin(x+\mathcal{O}(x^3)))^3$$

$$=(x+\mathcal{O}(x^3))^3=(x+\mathcal{O}(x^3))(x+\mathcal{O}(x^3))(x+\mathcal{O}(x^3))$$

$$=x^3+\mathcal{O}(x^5)$$

Detta ger

$$\sin^3(\tan(x))(1-\cos(x))=(x^3+\mathcal{O}(x^5))(1-(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)))$$

$$=(x^3+\mathcal{O}(x^5))(\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4))$$

$$=\frac{x^5}{2}+\mathcal{O}(x^7)$$

Vi behöver alltså utveckla täljaren till ordning 5.

$$\sin(\sin(x))=\sin(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^7))$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^7)-\frac{1}{6}(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^7))^3+\frac{1}{120}(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathcal{O}(x^7))^5+\mathcal{O}(x^7)$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+3\cdot\frac{1}{6}\cdot x\cdot x\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{1}{120}x^5+\mathcal{O}(x^7)$$

$$= x + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + O(x^7)$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + O(x^7)$$

$$\ln(1+x) = x + O(x^2)$$

$$\ln(1+x^3) = x^3 + O(x^6)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\sin(x)) - \tan(x) + a\ln(1+x^3)}{\sin^3(\tan(x))(1-\cos(x))}$$

$$= \frac{\cancel{x} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \left(\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5\right) + ax^3 + O(x^7)}{\frac{x^5}{2} + O(x^7)}$$

$$= \frac{\left((a - \frac{2}{3})x^3 - \frac{1}{30}x^5 + O(x^7)\right)/x^3}{\left(\frac{x^5}{2} + O(x^7)\right)/x^3}$$

$$= \frac{a - \frac{2}{3} - \frac{1}{30}x^2 + O(x^4)}{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}$$

Om $a - \frac{2}{3} \neq 0$ får vi nollskild täljare men noll i nämnaren, och därmed att gränsvärdet ej existerar när $x \to 0$.

Om däremot $a = \frac{2}{3}$ får vi:

$$\frac{\left(-\frac{1}{30}x^2 + O(x^4)\right)/x^2}{\left(\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)/x^2} = \frac{-\frac{1}{30} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} \longrightarrow -\frac{1}{15} \text{ när } x \to 0.$$

4. Alternativ 1. (Integraljämförelse)

Eftersom $x \in (\frac{1}{e}, 1)$ är x^{2^n} avtagande med n.

Om $t \in [n, n+1]$ är $t \geq n$ och vi får

$$x^{2^n} \geq x^{2^t}$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} x^{2^n}\, dt \geq \int_n^{n+1} x^{2^t}\, dt$$

$$\Rightarrow x^{2^n} \geq \int_n^{n+1} x^{2^t}\, dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{2^t}\, dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \geq \int_0^{\infty} x^{2^t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{2^t \ln(x)}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s = 2^t,\ t = \frac{\ln(s)}{\ln(2)} \\ dt = \frac{1}{s\ln(2)}\, ds,\ s: 1 \to \infty \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\infty} \frac{e^{s\ln(x)}}{s}\, ds$$

Nu har vi $\frac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow -1 < \ln(x) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{\ln(x)} > 1$,

men även $s\ln(x) > -1$ för alla $s > 1$. Detta ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \geq \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\infty} \frac{e^{s\ln(x)}}{s}\, ds$$

$$\geq \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{-\frac{1}{\ln(x)}} \frac{e^{s\ln(x)}}{s} \, ds$$

$$\geq \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{-\frac{1}{\ln(x)}} \frac{e^{-1}}{s} \, ds$$

$$= \frac{1}{e\ln(2)} \Big[\ln|s| \Big]_1^{-\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$= \frac{1}{e\ln(2)} \Big(\ln\Big|\underbrace{-\frac{1}{\ln(x)}}_{>0}\Big| - \ln|1| \Big)$$

$$= \frac{1}{e\ln(2)} \ln\Big(-\frac{1}{\ln(x)}\Big)$$

$$= \frac{-\ln(-\ln(x))}{e\ln(2)},$$

vilket vi ville visa.

<u>Alternativ 2.</u> (Cauchyförtätning, eng. Cauchy condensation)

Eftersom $x<1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} = x + x^2 + x^4 + \ldots$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\geq x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{4}x^7 + \ldots$$

$$\geq x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n$$

$= -\ln(1-x)$

Taylorutveckling: $\underbrace{e^{\ln(x)}}_{=x} = 1 + \ln(x) + \frac{1}{2}(\theta(x)\ln(x))^2 \geq 1 + \ln(x)$

$\Rightarrow 1 - x \leq -\ln(x).$

Detta ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \geq -\ln(1-x)$$

$$\geq -\ln(-\ln(x))$$

$$\geq \frac{-\ln(-\ln(x))}{e\ln(2)},$$

där sista olikheten följer av att $-\ln(\ln(x)) > 0$ för $x \in (\frac{1}{e}, 1)$

och att $e\ln(2) = \underbrace{e}_{>2} \ln(\underbrace{\sqrt{4}}_{>\sqrt{e}}) > 2\ln(\sqrt{e}) = 1.$

5. Låt

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + k(-1)^k}.$$

Vi undersöker konvergens med kvotkriteriet:

$$\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = |x| \cdot \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{k+1} + (k+1)(-1)^{k+1}}}{\frac{1}{\sqrt{k} + k(-1)^k}} \right|$$

$$= |x| \cdot \left| \frac{\sqrt{k} + k(-1)^k}{\sqrt{k+1} + (k+1)(-1)^{k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{(-1)^k} \right|$$

$$= |x| \cdot \left| \frac{((-1)^k\sqrt{k} + k)/k}{((-1)^k\sqrt{k+1} - (k+1))/k} \right|$$

$$= |x| \cdot \left| \frac{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + 1}{\frac{(-1)^k\sqrt{k+1}}{k} - \frac{1}{k} - 1} \right|$$

$$\longrightarrow |x| \left|\frac{1}{-1}\right| = |x| \text{ när } k \to \infty$$

Enligt kvotkriteriet konvergerar då serien absolut om $|x|<1$ och serien divergerar om $|x|>1$.

Fallen $x=-1$ och $x=1$ undersöks separat.

Om $x=1$ blir serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+k(-1)^k}$$

Multiplikation med konjugat ger

$$\frac{1}{\sqrt{k}+k(-1)^k} \cdot \frac{\sqrt{k}-k(-1)^k}{\sqrt{k}-k(-1)^k} = \frac{\sqrt{k}-k(-1)^k}{k-k^2} = \frac{k(-1)^k-\sqrt{k}}{k(k-1)}$$

$$= \frac{\cancel{k}(-1)^k}{\cancel{k}(k-1)} - \frac{\sqrt{k}}{k(k-1)} = \frac{(-1)^k}{k-1} - \frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}$$

Notera nu att

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-1}$ är konvergent enl. Leibniz kriterium

(termerna växlar tecken, är till belopp avtagande och går mot noll)

och att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k-1)} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-1}(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

också är konvergent. Därför konvergerar potensserien när $x=1$.

Om $x=-1$ blir serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k k} \cdot \frac{(-1)^k}{(-1)^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^k\sqrt{k}+k}$$

Vi skriver om enligt

$$\frac{1}{(-1)^k\sqrt{k}+k} \cdot \frac{(-1)^k\sqrt{k}-k}{(-1)^k\sqrt{k}-k} = \frac{(-1)^k\sqrt{k}-k}{k-k^2} = \frac{k-(-1)^k\sqrt{k}}{k(k-1)}$$

$$= \frac{1}{k-1} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}(k-1)}$$

Notera nu att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ divergerar (harmoniska serien)

och att

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}(k-1)}$$ konvergerar enligt Leibniz kriterium.

Därmed måste potensserien divergera för $x=-1$.

Alltså, för $|x|<1$ är serien absolutkonvergent, för $x=1$ är den betingat konvergent och för $x=-1$ och $|x|>1$ är den divergent.

6. Inför beteckningar enligt tipset (Obs! $0<\delta<1$) och notera att

$$J_\delta(0) = \int_\delta^1 \frac{x^0-1}{\ln(x)}\,dx = 0.$$

Om vi får flytta in derivatan i integralen fås

$$J_\delta'(y) = \frac{d}{dy}\int_\delta^1 \frac{x^y-1}{\ln(x)}\,dx = \int_\delta^1 \frac{\cancel{\ln(x)}x^y}{\cancel{\ln(x)}}\,dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_\delta^1 = \frac{1-\delta^{y+1}}{y+1},$$

men detta måste rättfärdigas. Det gäller om

$$\underbrace{\frac{x^{y+h}-x^y}{h\ln(x)}}_{=\Delta(h)} \to x^y \text{ likformigt när } h\to 0 \text{ för } x\in[\delta,1].$$

Vi visar att $\lim_{h\to 0} \sup_{x\in[\delta,1]} |\Delta(h) - x^y| = 0 \quad \forall y \geq 0.$

$$|\Delta(h)-x^y| = \left|\frac{x^{y+h}-x^y}{h\ln(x)} - x^y\right| = |x^y|\cdot\left|\frac{x^h-1-h\ln(x)}{h\ln(x)}\right|$$

Taylorutveckling ger nu

$$x^h = e^{h\ln(x)} = 1 + h\ln(x) + \frac{1}{2}h^2\ln^2(x) + \frac{1}{6}(\Theta(x,h)h\ln(x))^3$$

för något $\Theta(x,h)\in(0,1)$, så att

$$\left|\frac{x^h-1-h\ln(x)}{h\ln(x)}\right| = \left|\frac{1}{2}h\ln(x) + \frac{1}{6}\Theta(x,h)^3h^2\ln^2(x)\right|$$

$$= |h\ln(x)|\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Theta(x,h)^3h\ln(x)\right|$$

$$\leq |h||\ln(x)|\left(\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{6}\underbrace{\Theta(x,h)^3}_{>0}h\ln(x)\right|\right)$$

$$= |h||\ln(x)|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Theta(x,h)^3|h||\ln(x)|\right).$$

Vi får

$$\sup_{x\in[\delta,1]}|\Delta(h)-x^y| \leq \sup_{x\in[\delta,1]} |h|\underbrace{|\ln(x)|}_{\leq|\ln(\delta)|}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\underbrace{\Theta(x,h)^3}_{\leq 1}|h|\underbrace{|\ln(x)|}_{\leq|\ln(\delta)|}\right)$$

$$\leq |h||\ln(\delta)|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}|h||\ln(\delta)|\right)$$

$$\to 0 \text{ när } h\to 0.$$

och alltså måste $J'_\delta(y) = \frac{1-\delta^{y+1}}{y+1}$ stämma.

Notera också att $J'_\delta(y) \longrightarrow \frac{1}{y+1}$ likformigt när $\delta \to 0^+$ för alla $y \geq 0$, eftersom

$$\sup_{y\geq 0} \left| \frac{1-\delta^{y+1}}{y+1} - \frac{1}{y+1} \right| = \sup_{y\geq 0} \left| \frac{\delta^{y+1}}{y+1} \right| \leq \sup_{y\geq 0} \left| \frac{\delta}{y+1} \right| = |\delta| \to 0$$

när $\delta \to 0^+$.

Detta ger

$$I_5 = \lim_{\delta\to 0^+} J_\delta(1) = \lim_{\delta \to 0^+} \Big(\underbrace{J_\delta(0)}_{=0} + \int_0^1 J'_\delta(y)\,dy \Big)$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \int_0^1 \frac{1-\delta^{y+1}}{y+1}\,dy = \int_0^1 \lim_{\delta\to 0^+} \left(\frac{1-\delta^{y+1}}{y+1} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y+1}\,dy = \Big[\ln|y+1| \Big]_0^1 = \ln(2).$$