Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
4 april 2023 kl. 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund (072-8586787)

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 6 uppgifter (2 sidor). Inga hjälpmedel!

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. För $t > 0$, låt $y_t : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$y_t''(x) + 2e^t y_t'(x) + e^{2t} y_t(x) = e^{-x \cdot e^t}, \quad y_t(0) = y_t'(0) = t.$$

Beräkna gränsvärdet

$$I_1(x) := \lim_{t \to \infty} e^{-t} \ln y_t(x) \quad \text{för alla } x > 0.$$

(8p)

2. Givet $a < 0$, låt y_a beteckna lösningen till differentialekvationen

$$(1 + x^2) y_a'(x) = 1 + y_a(x)^2, \quad y_a(0) = a.$$

Bestäm a så att

$$I_2 := \lim_{x \to \infty} y_a(x) = 2.$$

LEDTRÅD: Du får använda utan bevis att

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v},$$

för alla u och v för vilka vänster- och högerled är väldefinerade. (8p)

3. Beräkna gränsvärdet

$$I_3 := \lim_{x \to 1^-} (-\ln x)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}.$$

LEDTRÅD: Uppskatta summan ovanifrån och underifrån med integraler. Du får använda (utan bevis) att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$$

(12p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$I_4 := \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x + x^3) - \ln(1 + x + x^3)}{\arctan(x + x^5)(1 - \cos(\sqrt{x}))}.$$

Standardgränsvärden och standardutvecklingar av $\cos, \sin, \ln, \arctan$ får användas utan bevis. (8p)

5. Beräkna integralen

$$I_5 := \int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x}\, dx.$$

LEDTRÅD: För $\delta > 0$, definiera funktionen $J_\delta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ enligt

$$J_\delta(y) = \int_\delta^1 \frac{x^y - 1}{\ln x}\, dx, \quad y \geq 0.$$

Vad är derivatan av J_δ? Observera att

$$J_\delta(1) = J_\delta(0) + \int_0^1 J_\delta'(y)\, dy \quad \text{och} \quad I_5 = \lim_{\delta \to 0^+} J_\delta(1).$$

Redogör noga för hur du beräknar denna derivata. (10p)

6. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beteckna funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x \sin(1/x) e^{x^2 y - 5y^3} & \text{om } x \neq 0 \\ e^{-5y^3} & \text{om } x = 0 \end{cases}.$$

Är f kontinuerlig i punkten $(0, 0)$? (4p)

Detta är ett studentgjort lösningsförslag och har inte kollats av examinatorn

FORTSÄTTNINGSANALYS 230404

1. <u>Alternativ 1.</u> (Förskjutningsmetoden)

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2e^t r + e^{2t} = 0$

$\Leftrightarrow (r + e^t)^2 = 0$

$\Rightarrow r = -e^t$ (dubbelrot)

Låt $z_t(x) = y_t'(x) - r\, y_t(x) = y_t'(x) + e^t y_t(x)$

och notera $z_t'(0) = y_t'(0) + e^t y_t(0) = t + te^t$.

Vänsterledet kan då skrivas

$$y_t''(x) + 2e^t y_t'(x) + e^{2t} y_t(x)$$

$$= y_t''(x) + e^t y_t'(x) + e^t y_t'(x) + e^{2t} y_t(x)$$

$$= \underbrace{y_t''(x) + e^t y_t'(x)}_{= z_t'(x)} + e^t \underbrace{\left(y_t'(x) + e^t y_t(x) \right)}_{= z_t(x)}$$

$$= z_t'(x) + z_t(x),$$

så att ekvationen blir

$$z_t'(x) + e^t z_t(x) = e^{-xe^t}, \quad z_t(0) = t + te^t = t(1 + e^t).$$

Denna löses med integrerande faktor e^{xe^t}:

$$z_t'(x) e^{xe^t} + e^t z_t(x) e^{xe^t} = 1$$

$$\Rightarrow \left(z_t(x) e^{xe^t} \right)' = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(z_t(s) e^{se^t} \right)' ds = \int_0^x 1\, ds$$

$$\Rightarrow z_t(x) e^{xe^t} - \underbrace{z_t(0)}_{= t(1+e^t)} e^{0 \cdot e^t} = x$$

$$\Rightarrow z_t(x)\, e^{xe^t} = x + t(1+e^t)$$

$$\Rightarrow z_t(x) = \big(x + t(1+e^t)\big)\, e^{-xe^t}.$$

Vi löser nu

$$y_t'(x) + e^t y_t(x) = \big(x + t(1+e^t)\big)e^{-xe^t}, \quad y_t(0) = t,$$

återigen med integrerande faktor e^{xe^t}:

$$y_t'(x)e^{xe^t} + e^t y_t(x)e^{xe^t} = x + t(1+e^t)$$

$$\Rightarrow \left(y_t(x)e^{xe^t}\right)' = x + t(1+e^t)$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(y_t(s)e^{se^t}\right)' ds = \int_0^x \big(s + t(1+e^t)\big)\, ds$$

$$\Rightarrow y_t(x)e^{xe^t} - \underbrace{y_t(0)}_{=t}\, e^{0\cdot e^t} = \frac{x^2}{2} + xt(1+e^t)$$

$$\Rightarrow y_t(x)e^{xe^t} = \frac{x^2}{2} + xt(1+e^t) + t$$

$$\Rightarrow y_t(x) = \left(\frac{x^2}{2} + xt(1+e^t) + t\right)e^{-xe^t}$$

$$e^{-t}\ln(y_t(x)) = e^{-t}\left(\ln\left(\frac{x^2}{2} + xt(1+e^t) + t\right) + \ln\left(e^{-xe^t}\right)\right)$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{x^2}{2} + xt(1+e^t) + t\right)}{e^t} + e^{-t}(-xe^t)$$

$$= \frac{\ln\left(te^t\left(\frac{x^2}{2te^t} + \frac{x}{e^t} + x + \frac{1}{e^t}\right)\right)}{e^t} - x$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(t)}{e^t}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{t}{e^t}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{e^t}}_{\to 0}\underbrace{\ln\left(x + \frac{x^2}{2te^t} + \frac{x}{e^t} + \frac{1}{e^t}\right)}_{\to \ln(x)} - x$$

$\longrightarrow -x$ när $t \to \infty$.

Alternativ 2. (Konstantbestämning)

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2e^t r + e^{2t} = 0$

$$\Rightarrow r = -e^t \text{ (dubbelrot)}$$

Eftersom $-e^t$ är en rot till kar. ekv. kommer lösningen innehålla (konstant)$\cdot e^{-xe^t}$, men eftersom det även är en dubbelrot kommer detta öka graden till (1:a-gradspolynom)$\cdot e^{-xe^t}$. Dessutom förekommer $-xe^t$ som argument i högerledet, varför graden ökar ytterligare till (2:a-gradspolynom)$\cdot e^{-xe^t}$.

Vi ansätter $y_t(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-xe^t}$

$$\Rightarrow y_t'(x) = (-ae^t x^2 + (2a - be^t)x + b - ce^t)e^{-xe^t}$$

$$\Rightarrow y_t''(x) = (ae^{2t}x^2 + (-4ae^t + be^{2t})x + 2a - 2be^t + ce^{2t})e^{-xe^t}.$$

$$y_t''(x) + 2e^t y_t'(x) + e^{2t} y_t(x) = e^{-xe^t}$$

$$\Leftrightarrow 2a e^{-xe^t} = e^{-xe^t}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} y_t(0) = t \\ y_t'(0) = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = t \\ b - ce^t = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = t \\ b = t(1 + e^t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_t(x) = \left(\frac{x^2}{2} + t(1+e^t)x + t\right)e^{-xe^t}$$

$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\ln(y_t(x)) = \ldots = -x$ (se ovan).

2. Ekvationen är separabel enl.

$$(1+x^2)y_a'(x) = 1 + y_a(x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{y_a'(x)}{1+y_a(x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^x \frac{y_a'(t)}{1+y_a(t)^2}\,dt}_{y=y_a(t),\ dy=y_a'(t)dt} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{y_a(0)}^{y_a(x)} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \arctan(y_a(x)) - \arctan(\underbrace{y_a(0)}_{=a}) = \arctan(x) - \arctan(0)$$

$$\Rightarrow \arctan(y_a(x)) = \arctan(x) + \arctan(a)$$

$$\Rightarrow y_a(x) = \tan(\arctan(x) + \arctan(a))$$

$$= \frac{x+a}{1-ax}.$$

$$\lim_{x\to\infty} y_a(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}-a} = -\frac{1}{a}$$

Vi väljer alltså $a = -\frac{1}{2}$.

3. Låt $x \in (0,1)$ och notera att x^{n^2} avtar med n.
Vi kan då skriva

$$x^{(t+1)^2} \leq x^{n^2} \leq x^{t^2} \qquad \text{för } t \in [n-1, n]$$

$$\Rightarrow \int_{n-1}^{n} x^{(t+1)^2}\,dt \leq \int_{n-1}^{n} x^{n^2}\,dt \leq \int_{n-1}^{n} x^{t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{n-1}^{n} x^{(t+1)^2}\,dt \le x^{n^2} \le \int_{n-1}^{n} x^{t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} x^{(t+1)^2}\,dt \le \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} x^{t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} x^{(t+1)^2}\,dt \le \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \int_{0}^{\infty} x^{t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{\infty} x^{t^2}\,dt \le \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \int_{0}^{\infty} x^{t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{\infty} e^{t^2\ln(x)}\,dt \le \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \int_{0}^{\infty} e^{t^2\ln(x)}\,dt$$

Substituera nu $s = (-\underbrace{\ln(x)}_{<0})^{1/2}\, t$ så att $s^2 = -\ln(x)t^2$:

$$\frac{1}{(-\ln(x))^{1/2}} \int_{(-\ln(x))^{1/2}}^{\infty} e^{-s^2}\,ds \le \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \frac{1}{(-\ln(x))^{1/2}} \int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds$$

$$\Rightarrow \int_{(-\ln(x))^{1/2}}^{\infty} e^{-s^2}\,ds \le (-\ln(x))^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds}_{=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-s^2}}_{\text{jämn}}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} - \int_{0}^{(-\ln(x))^{1/2}} e^{-s^2}\,ds \le (-\ln(x))^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \underbrace{\int_{0}^{(-\ln(x))^{1/2}} e^{-s^2}\,ds}_{\to \int_0^0 e^{-s^2}ds = 0 \text{ när } x\to 1^-} \le (-\ln(x))^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Av instängningsprincipen följer därmed att $\lim_{x\to 1^-} (-\ln(x))^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Vi Taylorutvecklar först nämnaren. Den första termen i nämnaren avgör hur långt täljaren behöver utvecklas.

$$\arctan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow \arctan(x+x^5) = x + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$$

Detta ger

$$\arctan(x+x^5)\,(1-\cos(\sqrt{x})) = (x+\mathcal{O}(x^3))\,(1-(1-\frac{x}{2}+\mathcal{O}(x^2)))$$

$$= (x+\mathcal{O}(x^3))(\frac{x}{2}+\mathcal{O}(x^2)) = \frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3).$$

Vi behöver alltså utveckla täljaren till ordning 2.

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow \sin(x+x^3) = x + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow \ln(1+x+x^3) = x + x^3 - \frac{1}{2}(x+x^3)^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

Detta ger

$$\frac{\sin(x+x^3) - \ln(1+x+x^3)}{\arctan(x+x^5)(1-\cos(\sqrt{x}))} = \frac{x - (x - \frac{x^2}{2}) + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)} \longrightarrow 1 \text{ när } x \to 0.$$

5. Inför beteckningar enligt tipset (Obs! $0<\delta<1$) och notera att

$$J_\delta(0) = \int_\delta^1 \frac{x^0 - 1}{\ln(x)}\,dx = 0.$$

Om vi får flytta in derivatan i integralen fås

$$J_\delta'(y) = \frac{d}{dy}\int_\delta^1 \frac{x^y-1}{\ln(x)}\,dx = \int_\delta^1 \frac{\cancel{\ln(x)}x^y}{\cancel{\ln(x)}}\,dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_\delta^1 = \frac{1-\delta^{y+1}}{y+1},$$

men detta måste rättfärdigas. Det gäller om

$$\underbrace{\frac{x^{y+h}-x^y}{h\ln(x)}}_{=\Delta(h)} \to x^y \quad \text{likformigt när } h\to 0 \text{ för } x\in[\delta,1].$$

Vi visar att $\lim\limits_{h\to 0}\sup\limits_{x\in[\delta,1]}|\Delta(h)-x^y| = 0 \quad \forall y\geq 0.$

$$|\Delta(h)-x^y| = \left|\frac{x^{y+h}-x^y}{h\ln(x)} - x^y\right| = |x^y|\cdot\left|\frac{x^h-1-h\ln(x)}{h\ln(x)}\right|$$

Taylorutveckling ger nu

$$x^h = e^{h\ln(x)} = 1 + h\ln(x) + \frac{1}{2}h^2\ln^2(x) + \frac{1}{6}(\Theta(x,h)h\ln(x))^3$$

för något $\Theta(x,h)\in(0,1)$, så att

$$\left|\frac{x^h-1-h\ln(x)}{h\ln(x)}\right| = \left|\frac{1}{2}h\ln(x) + \frac{1}{6}\Theta(x,h)^3h^2\ln^2(x)\right|$$

$$= |h\ln(x)|\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Theta(x,h)^3h\ln(x)\right|$$

$$\leq |h||\ln(x)|\left(\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{6}\underbrace{\Theta(x,h)^3}_{>0}h\ln(x)\right|\right)$$

$$= |h||\ln(x)|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Theta(x,h)^3|h||\ln(x)|\right).$$

Vi får

$$\sup_{x\in[\delta,1]} |\Delta(h)-xy| \le \sup_{x\in[\delta,1]} |h|\underbrace{|\ln(x)|}_{\le|\ln(\delta)|}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\underbrace{\theta(x,h)^3}_{\le 1}|h|\underbrace{|\ln(x)|}_{\le|\ln(\delta)|}\right)$$

$$\le |h||\ln(\delta)|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}|h||\ln(\delta)|\right)$$

$$\longrightarrow 0 \text{ när } h\to 0.$$

och alltså måste $J_\delta'(y) = \dfrac{1-\delta^{y+1}}{y+1}$ stämma.

Notera också att $J'_\delta(y) \longrightarrow \dfrac{1}{y+1}$ likformigt när $\delta\to 0^+$ för alla $y\ge 0$, eftersom

$$\sup_{y\ge 0}\left|\frac{1-\delta^{y+1}}{y+1}-\frac{1}{y+1}\right| = \sup_{y\ge 0}\left|\frac{\delta^{y+1}}{y+1}\right| \le \sup_{y\ge 0}\left|\frac{\delta}{y+1}\right| = |\delta| \to 0$$

när $\delta\to 0^+$.

Detta ger

$$I_5 = \lim_{\delta\to 0^+} J_\delta(1) = \lim_{\delta\to 0^+}\left(\underbrace{J_\delta(0)}_{=0} + \int_0^1 J_\delta'(y)\,dy\right)$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+}\int_0^1 \frac{1-\delta^{y+1}}{y+1}\,dy = \int_0^1 \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1-\delta^{y+1}}{y+1}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y+1}\,dy = \Big[\ln|y+1|\Big]_0^1 = \ln(2).$$

6. Notera $f(0,0) = e^{-5\cdot 0^3} = 1$.

Om f skall vara kontinuerlig i $(0,0)$ måste alltså

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Men längs kurvan $(\frac{1}{t}, 0)$ har vi $(\frac{1}{t}, 0) \to (0,0)$ när $t \to \infty$ och

$$f(\tfrac{1}{t}, 0) = 4 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{t}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{|\cdot| \le 1} \to 0 \neq 1 \text{ när } t \to \infty.$$

f är alltså inte kontinuerlig i $(0,0)$.

Ahi Lean Binghad