Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
13 januari 2023 kl. 14.00-18.00

Examinator: Michael Björklund (072-8586787)

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 7 uppgifter (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Låt $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-|1-x|}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$$

Beräkna $y(2)$. *Observera: Det är ett absolutbelopp (inte en parantes) i potensen i högerledet!.* (8p)

2. Bestäm lösningen (inklusive det maximala intervall på vilket lösningen är definierad) till initialvärdesproblemet:

$$y'(x) = \frac{x^2 + xy(x) + y(x)^2}{x^2}, \quad y(1) = 0.$$

Ledtråd: Sätt $u(x) = y(x)/x$, visa att u uppfyller en separabel differentialekvation och lös denna. (8p)

3. Beräkna gränsvärdet

$$I_3 := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} n e^{-n/N^2}.$$

Ledtråd: Uppskatta summan ovanifrån och nerifrån med integraler. Du får använda att

$$\int_0^b x e^{-ax}\, dx = \frac{1 - (1+ab)e^{-ab}}{a^2}, \quad \text{för alla } a, b > 0,$$

utan bevis. Observera att uttrycket som skall analyseras inte är en Riemannsumma. (9p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$I_4 := \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)\cdot\left(\cos(\sin(x)) - \frac{1}{2}(1+\cos^2(x))\right)}{\ln(1+x^2)(x-\sin(x))}.$$

Standardgränsvärden och standardutvecklingar av $\cos, \sin, \ln, \arctan$ får användas utan bevis. (8p)

5. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!\cdot x^{k^2} = x + 2x^4 + 6x^9 + \ldots?$$

Ange även om konvergensen är absolut eller betingad.

Ledtråd: Du får använda att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

utan bevis. (4p)

6. Givet ett positivt heltal n, definiera funktionen $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ enligt

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{1+x+k}\right)}{\ln(1+x+k)\ln(2+x+k)}, \quad x \geq 0.$$

a) Konvergerar funktionsföljden (f_n) likformigt på $[0,\infty)$? (4p)

b) Beräkna $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ för alla $x \geq 0$. (5p)

Ledtråd: Kan $f_n(x)$ skrivas som en teleskoperande summa för varje $x \geq 0$? Tips: Skriv om täljaren med hjälp av logaritmlagarna och använd identiteten

$$\frac{v-u}{uv} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}, \quad \textit{för alla } u, v \neq 0.$$

7. Avgör huruvida gränsvärdet

$$I = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{e^{-1/x^4}y}{e^{-2/x^4}+y^2}$$

existerar. Om gränsvärdet existerar så skall det också beräknas. (4p)

1.) Karaktäristiska rötter $r_1 = r_2 = 1$ (dubbelrot).

• Alt I (Förskjutning) $(\underbrace{y'-y}_{=z'})' - (\underbrace{y'-y}_{=:z}) = f$ $\left(y(0) = y'(0) = 0,\ f(x) = e^{-|1-x|} \right)$ $\rightarrow z(0)=0$

$\rightsquigarrow z(x) = e^x \cdot \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$

$\rightsquigarrow y(x) = e^x \cdot \int_0^x e^{-t} z(t)\, dt = e^x \int_0^x \left(\int_0^t e^{-p} f(p)\, dp \right) dt$ $\left(f(p) = \begin{cases} e^{-1} \cdot e^{p} & 0 \le p \le 1 \\ e \cdot e^{-p} & p > 1 \end{cases} \right)$

$\rightsquigarrow y(2) = e^2 \cdot \left(\int_0^1 \left(\int_0^t e^{-1} dp \right) dt + \int_1^2 \left(\int_0^1 e^{-1} dp + \int_1^t e \cdot e^{-2p} dp \right) dt \right)$

$= e^2 \cdot \left(e^{-1}/2 + e^{-1} + e \cdot \int_1^2 (e^{-2} - e^{-2t})\, dt/2 \right)$

$= 3e/2 + e^3 \cdot e^{-2}/2 - e^3 (e^{-2} - e^{-4})/4 = (2 - 1/4)e + e^{-1}/4$

$\boxed{= (7e + e^{-1})/4}$.

• Alt II (PB) Om $0 \le x \le 1$: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-1} \cdot e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$ $\rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{x-1}$ (löses med PB:s-metod)

$\rightsquigarrow y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = \frac{3}{2}$.

Lös nu $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e \cdot e^{-x}$, $y(1) = 1/2$, $y'(3/2)$ $\rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{4} \left(e^{2x}(6x-5) + e^2 \right) e^{-(x+1)}$ för $x \ge 1$

$\rightsquigarrow \boxed{y(2) = (7e + e^{-1})/4}$

2.) $y'(x) = f(y(x)/x)$, $f(u) = 1 + u + u^2$. Använd ledtråd:

Sätt $u = y/x \rightsquigarrow u' = (x \cdot y' - y)/x^2 = (y' - y/x)/x = (f(u) - u)/x$ $\quad u(1) = y(1)/1 = 0$.

$\rightsquigarrow \frac{u'}{\underbrace{f(u) - u}_{= 1 + u^2}} = \frac{1}{x}$, $u(1) = 0 \rightsquigarrow \arctan(u(x)) = \ln(x) + C$ $\left(\arctan(u(1)) = \ln(1) + C \right)$ $\rightarrow C = 0$

Separabel ODE!

$\rightsquigarrow u(x) = \tan(\ln x) \rightsquigarrow$ $\boxed{y(x) = x \cdot \tan(\ln x)}$ — definierad för $-\pi/2 < \ln x < \pi/2$ $\Leftrightarrow x \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$.

---

3) $f_N(x) = x e^{-x/N^2} \rightsquigarrow f_N'(x) = (1 - x/N^2) e^{-x/N^2} \ge 0 \quad \forall x \in [0, N^2]$.

$\rightsquigarrow f_N$ växande på $[0, N^2] \rightsquigarrow f_N(n) \le f_N(x) \le f_N(n+1) \quad \forall n \le x \le n+1 \le N^2$.

$\rightsquigarrow f_N(n) \le \int_n^{n+1} f_N(x) \le f_N(n+1) \quad \forall n \le N^2 - 1$. Sätt $s_N := \sum_{n=1}^{N} f_N(n)$

• $s_N \le \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f_N(x)\, dx = \int_1^{N+1} f_N(x)\, dx = \int_1^{N+1} x e^{-x/N^2} dx \le \int_0^{N+1} x e^{-x/N^2} dx = \int_0^{N} x e^{-x/N^2} dx + \underbrace{\int_N^{N+1} x e^{-x/N^2} dx}_{\le (N+1)e^{-1}}$

• $s_N = \sum_{n=0}^{N-1} f_N(n+1) \ge \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f_N(x)\, dx = \int_0^N f_N(x)\, dx \rightsquigarrow$

$\int_0^N x e^{-x/N^2} dx \le s_N \le \int_0^N x e^{-x/N^2} dx + (N+1)e^{-1}$

$a = 1/N^2$, $b = N$

$(1 - (1 + 1/N) e^{-1/N}) N^4 \rightsquigarrow \boxed{\lim_{N \to \infty} \frac{s_N}{N^3} = \frac{1}{2}}$

$\rightsquigarrow \lim_{N \to \infty} \frac{s_N}{N^2} = \lim_{N \to \infty} \left(1 - (1 + 1/N) e^{-1/N} \right) N^2$

$= \lim_{N \to \infty} \left(1 - (1 + 1/N)(1 - 1/N + 1/2N^2 + O(N^{-3})) \right) N^2$

$= 1 - (1 - 1/N^2) - (1 + 1/N)/2N^2 + O(N^{-3})$

$= 1/2N^2 + O(N^{-3})$

[OBS: Alternativ lösning på sidan 3]

4.) $\cdot\ \cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + O(y^6) \rightsquigarrow \cos(\sin x) - \frac{1}{2}(1+\cos^2 x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} + \frac{\sin^4(x)}{4!} + O(\sin^6 x)$

$$= \frac{\sin^4(x)}{4!} + O(\sin^6 x).$$

$\cdot\ \ln(1+x^2) = x^2 + O(x^4)$, $x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$

$$\rightsquigarrow \frac{\arctan x\left(\sin^4(x) + O(\sin^6 x)\right)}{x^2(1+O(x^2))\cdot\frac{x^3}{3!}(1+O(x^2))} = 3!\cdot\underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\to 1}\left(\frac{1}{4!}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4}_{\to 1} + O\underbrace{\left(\frac{\sin^6 x}{x^4}\right)}_{\to 0}\right)\cdot\underbrace{\frac{1}{(1+O(x^2))^2}}_{\to 1}$$

$$\boxed{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}}$$

---

5) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = \begin{cases} k! & n = k^2,\ k \geq 1 \\ 0 & \text{övrigt} \end{cases}$

Konvergensradie: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$

$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} (k!)^{1/k^2} & n = k^2 \\ 0 & \text{övrigt} \end{cases}$

$(k!)^{1/k^2} = \underbrace{\left(\frac{k!}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}}\right)^{1/k^2}}_{\to 1}\cdot\left(k^k\cdot e^{-k}\cdot\sqrt{2\pi k}\right)^{1/k^2}$

$\left(k^k\cdot e^{-k}\cdot\sqrt{2\pi k}\right)^{1/k^2} = e^{\frac{\ln k}{k}}\cdot e^{-1/k}\cdot e^{\left(\ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}\ln k\right)/k^2} \to 1$

$= 1.$

$\rightsquigarrow$ Absolutkonvergens $\forall |x| < 1$.

Divergens $\forall |x| > 1$

$\cdot\ \underset{\sim\sim\sim}{x = \pm 1}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k!(-1)^k}_{|\cdot|\to\infty}$ konvergerar ej (termerna går ej mot noll)

6a) $\cdot$ Alt I [Weierstraß] $\ln(1+u) \leq u \quad \forall u \geq 0 \rightsquigarrow \ln\left(1 + \frac{1}{1+x+k}\right) \leq \frac{1}{1+x+k} \quad \forall x > 0 \quad \forall k \geq 1.$

$$u_k(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{1+x+k}\right)}{\ln(1+x+k)\ln(2+x+k)} \leq \frac{1}{(1+x+k)\ln(1+x+k)\ln(2+x+k)} \leq \frac{1}{(1+k)(\ln(1+k))^2} \quad \forall k \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

Eftersom $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2} < \infty$ (enl. integralkriteriet), så gäller $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\geq 0}|u_k(x)| < \infty$

och därför konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt på $[0,\infty]$ (enl. Weierstraß M-test)

$\cdot$ Alt II [Teleskop] $\ln\left(1+\frac{1}{1+x+k}\right) = \ln\left(\frac{2+x+k}{1+x+k}\right) = \ln(2+x+k) - \ln(1+x+k)$

(inkl. b)

Partialbråk!

$$\rightsquigarrow \frac{\ln\left(1+\frac{1}{1+x+k}\right)}{\ln(1+x+k)\cdot\ln(2+x+k)} = \underbrace{\frac{1}{\ln(1+x+k)}}_{b_k(x)} - \underbrace{\frac{1}{\ln(2+x+k)}}_{= b_{k+1}(x)}$$

$$\rightsquigarrow f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = b_1(x) - \underbrace{b_{n+1}(x)}_{\to 0} \xrightarrow[\text{likformigt } \forall x\geq 0]{} b_1(x) = \frac{1}{\ln(2+x)} \quad \forall x \geq 0.$$

---

7. $t := e^{-1/x^4}$, $(x \to 0 \iff t \to 0^+)$ $\quad \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{e^{-1/x^4}\cdot y}{e^{-2/x^4} + y^2} = \lim\limits_{\substack{(t,y)\to(0,0)\\ t>0}} \frac{t\cdot y}{t^2+y^2}$

$(\cdot\ t = s,\ y = \gamma\cdot s,\ s \to 0^+,\ \gamma \geq 0)$

$= \lim\limits_{s\to 0^+}\frac{\gamma s^2}{(1+\gamma^2)s^2} = \frac{\gamma}{1+\gamma^2}$ — beror av γ! $\rightsquigarrow$ Gränsvärdet existerar ej!

t.ex. $(\gamma = 0)$ $x = (-\ln s)^{1/4}$ $y = 0$

$(\gamma = 1)$ $x = (-\ln s)^{1/4}$ $y = s$

$s \to 0^+$ producerar två olika gränsvärden!

Alt. lösning 3)

Obs: $\frac{1}{N^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N} n}_{=\frac{1}{2}N(N+1)} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{2}$, $N\to\infty$ (eller medelst integralkrit.)

$$\underbrace{\left(\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} n\right)}_{\xrightarrow{(*)} \frac{1}{2}} \underbrace{e^{-1/N}}_{\to 1} \leq \overbrace{\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} n \underbrace{e^{-n/N^2}}}^{A_N :=} \leq \underbrace{\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} n}_{\xrightarrow{(*)} \frac{1}{2}} \rightsquigarrow \boxed{A_N \to 1/2,\ N\to\infty.}$$

$e^{-1/N} \leq \cdot \leq 1$

$\forall\, 1 \leq n \leq N$