

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
18 augusti 2022, kl. 08.30-12.30

Examinator: Michael Björklund (072-8586787)

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 6 uppgifter (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Finn en funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$y''(x) + y(x) = \cos(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

LEDTRÅD: Ansätt $y(x) = xu(x)$. Vilka differentialekvationer måste funktionen u uppfylla?

(5p)

2. För varje $y_0 \in [0, \pi/2)$, finn en funktion $y : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$y'(x) \sin(y(x)) = \cos(y(x)) \cdot x \cos(x^2), \quad y(0) = y_0.$$

LEDTRÅD: Behandla fallet $y_0 = 0$ separat.

(9p)

3. För vilka $p, q, r \geq 0$ konvergerar serien

$$S(p, q, r) := \sum_{n=7000}^{\infty} \frac{1}{n^p \cdot (\ln n)^q \cdot (\ln \ln n)^r} \quad ?$$

(7p)

4. Bestäm reella tal a och b sådana att gränsvärdet:

$$I := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \ln(1 + x^4) - a \cdot x^3 \cdot \sin(x) - b \cdot x^2 \cdot \cos(x^2)}{x^2 \cdot \tan^2(x) \cdot (e^{x^2} - 1) \cdot (\cos x - 1)}$$

existerar.

(8p)

5. För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2^k} \quad ?$$

Ange även om konvergensen är absolut eller betingad. (3p)

6. För $k \geq 1$, definiera

$$a_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_k(\theta) = \sin(k\theta),$$

och låt $s_n(\theta) = \sum_{k=1}^n a_k(\theta)$ och $t_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k(\theta)}{k^2}$.

a) Visa att funktionen $t(\theta) := \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\theta)$ existerar för alla θ , och är kontinuerlig på $\mathbb{R}$. (2p)

b) Visa att sekvensen $(a_k(\theta))$ inte konvergerar mot noll för varje $\theta \in (0, \pi)$, och avgör huruvida gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\theta)$ existerar. (4p)

LEDTRÅD: Antag att $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin(k\theta) = 0$ för något $\theta \in (0, \pi)$. Skriv $k\theta = n_k\pi + \delta_k$ för ett (unikt bestämt) heltal n_k och (unikt bestämt) $\delta_k \in [-1/2, 1/2)$. Vad gäller för differensen mellan $n_{k+1}\pi + \delta_{k+1}$ och $n_k\pi + \delta_k$? Härled en motsägelse.

c) Visa att $(s_n(\theta))$ är en begränsad sekvens för alla θ . (5p)

LEDTRÅD: Skriv om sin på komplex form och använd geometrisk summation.

d) Visa att funktionen $g(\theta) := \sup\{|s_n(\theta)| : n \geq 1\}$ inte är kontinuerlig i punkten $\theta = 0$. (7p)

LEDTRÅD: Vad är $g(0)$, och hur beter sig $g(1/n)$ då $n \rightarrow \infty$?

1. Antatt $y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x \cdot u' \Rightarrow y'' = 2u' + x \cdot u'' \Rightarrow y'' + y = x \cdot \left(\frac{u'' + u}{=0} \right) + 2u' = \cos x$

$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow y(x) = \frac{x}{2} \cdot \sin x$ OBS: $y(0) = y(\pi) = 0$.

2. $y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$ uppfyller initialvärdeproblemet.

$y_0 \in (0, \pi/2)$: $y' \cdot \tan y = x \cdot \cos(x^2) \Rightarrow -\ln|\cos y(x)| = C + \frac{1}{2} \sin(x^2)$

$-\ln(\cos y_0) = C \Rightarrow \cos y(x) = e^{-C} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sin(x^2)} = \frac{\cos y_0}{\cos(0)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sin(x^2)} = \cos y_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \sin(x^2)}$ om $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$

använd!

$y(x) = \arccos(\cos(y_0) \cdot e^{-\frac{1}{2} \sin(x^2)})$ $y(0) = y_0 \in (0, \pi/2)$.

3. $p < 1$: $S(p, q, r) \geq \sum_{n=p, q, r}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow S(p, q, r) \rightarrow \infty$ diverger $\forall r, e \geq 0$.

$p > 1$: $S(p, q, r) \leq \sum_{n=p, q, r}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$

$p = 1$: Integraltest $S(1, q, r) < \infty \Leftrightarrow \int_{p, q, r}^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = \int_{p, q, r}^{\infty} \frac{dx}{x^2 (\ln x)^r}$

$S(p, q, r) < \infty \Leftrightarrow$
 $p > 1, \forall q, r \geq 0$
 $p = 1, q > 1, \forall r \geq 0$
 $p = q = 1, r > 1$

$\begin{cases} \text{om } q > 1 = \text{konst } \forall r \geq 0 \\ \text{om } q = 1 = \text{div } \forall r \geq 0 \end{cases}$
 $\frac{dx}{x^2 (\ln x)^r} < \infty \Leftrightarrow r > 1$

4. $\ln(1+u) = u + \frac{u^2}{2} + O(u^3) \Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2 + \frac{1}{2} x^4 + O(x^6)$

$x^6 \cdot \sin(x) = x^6 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) \right) = x^7 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} + O(x^{13})$

$x^2 \cdot \cos(x^2) = x^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + O(x^8) \right) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{6!} + O(x^{10})$

$\Rightarrow 2 \cdot \ln(1+x^2) - a \cdot x^6 \cdot \sin(x) - b \cdot x^2 \cdot \cos(x^2) = 2x^4 + \frac{1}{2} x^6 + O(x^8)$

$= a \left(x^7 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} \right) - b \cdot \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{6!} \right) + O(x^{10})$

$= \underbrace{(2 - a - b/2)}_{=0} x^4 + \underbrace{(0/3! + b/4!)}_{=0} x^6 + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{5!} - \frac{b}{6!} \right) x^8 + O(x^{10}) \Rightarrow \begin{cases} a + b/2 = 2 \\ 0/3! + b/4! = 0 \end{cases}$

$x^2 \cdot \tan^2(x) \cdot (e^x - 1) \cdot (\cos x - 1) = x^2 \cdot \underbrace{(x + O(x^3))}_{=x+O(x^3)}^2 \cdot \underbrace{(x^2 + O(x^4))}_{=x^2+O(x^4)} \cdot \underbrace{(-x^2/2 + O(x^4))}_{=x^2+O(x^4)}$
 $= -x^8/2 + O(x^{10})$ $b = -4a$

$\Rightarrow I = -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{5!} - \frac{b}{6!} \right) = -2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5!} - \frac{8}{6!} \right)$

$\Rightarrow a = -2, b = 8$

5. Konv. radie, $\rho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |2^k|^{1/2k}} = 1 \Rightarrow$

Absolutkonv. om $|x| < 1$, $\rho = 1$, $|x| > 1$.
 $x = \pm 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \infty$ (div!)

6. a) $u_k(\theta) = \frac{a_k(\theta)}{k^2}$ uppfyller $\max_{\theta} |u_k(\theta)| \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_1^{\infty} M_k < \infty$
 $\leftarrow M_k$

Weierstrass majoranttest: $\sum_1^{\infty} u_k$ konvergerar uniformt p. $\mathbb{R}$, $\Rightarrow u_k$ kont. $\forall k$

b) Fix $\theta \in (0, \pi)$. (Antag att $\lim_k \sin(k\theta) = 0$.)

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} u_k$ konvergerar.
 (Upp. konv. bevarar kont.)

$k\theta = n_k\pi + \delta_k$, $n_k \geq 0$, $\delta_k \in [-1/2, 1/2]$, $\delta_k \rightarrow 0$.

$\odot \theta = (k+1)\theta - k\theta = (n_{k+1} - n_k)\pi + \delta_{k+1} - \delta_k \leftrightarrow (1 - n_{k+1} + n_k)\pi = \delta_{k+1} - \delta_k \rightarrow 0$
 $\leftarrow$ överskridande av k , $\leftarrow$ e-hållbar, $\leftarrow \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \theta = 0$:
 Enda möjlighet är att
 $\delta_{k+1} = \delta_k$, $n_{k+1} = n_k + 1$
 $\forall k$

$\Rightarrow k\theta = k\pi \forall k$ tillr. stora.
 Men $\theta \in (0, \pi/2)$ - omöjligt!
 Motstridelse!

$\odot c) \sin(k\theta) = \frac{1}{2i} (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) = \text{Im}(e^{ik\theta})$

$\sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right)$

$= \text{Im} \left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right) = \text{Im} \left(\frac{(e^{i(n+1)\theta} - 1)(e^{-i\theta} - 1)}{|1 - e^{i\theta}|^2} \right)$

$= \frac{1}{|1 - e^{i\theta}|^2} \cdot \text{Im} (e^{in\theta} - e^{i(n+1)\theta} - e^{-i\theta} + 1) = \frac{\sin(n\theta) + \sin(n+1)\theta + \sin\theta}{2 - 2\cos\theta}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n\theta) + \sin(n+1)\theta + \sin\theta}{2\sin^2(\theta/2)} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(n\theta) + \sin(n+1)\theta + \sin\theta}{\sin^2(\theta/2)} \right) \leq \frac{3}{4\sin^2(\theta/2)}$

$\Rightarrow \sup_n |\sin(n\theta)| \leq \frac{3}{4\sin^2(\theta/2)} \quad \forall \theta \in (0, \pi)$

d) $\sin(n\theta) = 0 \quad \forall n \Rightarrow g(\theta) = 0$

$g(1/n) - g(0) = g(1/n) \geq \sin(1/n) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(1) + \sin(1 + \frac{1}{n}) + \sin(\frac{1}{n})}{\sin^2(1/2n)} \right)$
 ≥ 0 ≥ 0

$\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(1)}{\sin^2(1/2n)} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow g$ ej kontinuerlig i $\theta = 0$.