Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
12 april 2022, kl. 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund, 072-8586787

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt och redovisa vilka resultat från kursen som du använder.

Totalt 50 poäng, fördelade på <u>7 uppgifter</u> (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Låt y beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$y''(x) + 2y(x) + y(x) = xe^{-x}, \;\; y(0) = y'(0) = 0.$$

Beräkna gränsvärdet

$$I_1 := \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)e^x}{x^3}.$$

Ledtråd: vilken differentialekvation uppfyller $z(x) = y(x)e^x$? (7p)

2. Beräkna gränsvärdet

$$I_2(\alpha) := \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\alpha k) x^k$$

för alla $0 < \alpha < 2\pi$.

Ledtråd: $\cos(y) = \mathrm{Re}(e^{iy})$ och använd geometrisk summation. (5p)

3. Beräkna gränsvärdet

$$I_3 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{q=k}^{k^2} \frac{1}{q} \right).$$

(10p)

4. Låt φ vara en 3 gånger kontinuerligt deriverbar reellvärd funktion på $(-1,1)$. Vad måste $\varphi(0)$ och $\varphi'(0)$ vara för att gränsvärdet

$$I_4 := \lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - (\cos(x) + \sin(x))}{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

skall existera? Beräkna även I_4 för dessa värden, uttryckt i termer av $\varphi''(0)$. (8p)

5. Beräkna gränsvärdet

$$I_5 := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Ledtråd: kan summan göras teleskoperande? (5p)

6. Beräkna gränsvärdet

$$I_6 := \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{1+x^n}\, dx.$$

(8p)

7. Definiera funktionen $f(x) = e^{-\frac{\sin x + x^2}{1+\cos x}}$ för $x \in (-\pi, \pi)$. Visa att gränsvärdet

$$I_7(f) := \lim_{\substack{(x,h)\to(0,0)\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar, och beräkna dess värde. (7p)

Lösningsförslag: Tenta 2, 21/22

1. $z = y\cdot e^x \leadsto z' = (y'+y)e^x \leadsto z'' = (\underbrace{y''+2y'+y}_{=x\cdot e^{-x}})e^x = x \leadsto z(x) = x^3/6$ $\quad (z(0)=z'(0)=0)$

$\leadsto I_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{z(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

---

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\alpha k)\, x^k \underset{-1<x<1}{=} Re\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{e^{i\alpha}\cdot x}_{=:z,\ |z|<1})^k\right) \underset{\text{geom. sum}}{\overset{!}{=}} Re\left(\frac{1}{\underbrace{1-e^{i\alpha}x}_{=z}}\right) = Re\left(\frac{1-e^{-i\alpha}x}{|1-e^{i\alpha}x|^2}\right)$

$= \frac{1-x\cdot\cos\alpha}{1+x^2-2x\cos\alpha} \xrightarrow[(\cos\alpha\neq 1)]{x\to 1} I_2(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{2}$, om $0<\alpha<2\pi$.

(existerar ej om $\alpha = 0$)

---

3. $s(k) := \sum_{q=k}^{k^2} \frac{1}{q}$: $\underbrace{\int_k^{k^2+1} \frac{dx}{x}}_{=\ln\left(\frac{k^2+1}{k}\right)} \le s(k) \le \underbrace{1/k - 1/(k^2+1)}_{\le 1/k} + \underbrace{\int_k^{k^2+1}\frac{dx}{x}}_{=\ln\left(\frac{k^2+1}{k}\right)}$

$T(n) := \sum_{k=1}^{n} s(k)$: $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln\left(\frac{k^2+1}{k}\right)}_{\ge \ln k} \le T(n) \le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln\left(\frac{k^2+1}{k}\right)}_{\le \ln(k+1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}_{\le 1+\ln(n+1)}$

$\leadsto \underbrace{\int_2^{n+1} \ln x\, dx}_{} \le T(n) \le 1+\ln(n+1) + \underbrace{\int_1^{n+1} \ln x\, dx}_{=(n+1)\cdot(\ln(n+1)-1)+1}$

$= (n+1)\cdot(\ln(n+1)-1) - 2(\ln 2 - 1)$

$\leadsto \frac{T(n)}{n\cdot \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} I_3 = 1$

---

4. $(e^\varphi)' = \varphi'\cdot e^\varphi$, $\quad (e^\varphi)'' = (\varphi'' + (\varphi')^2)e^\varphi$, $\quad (e^\varphi)''' = (\varphi''' + 2\varphi''\cdot\varphi' + \varphi'(\varphi''+(\varphi')^2))e^\varphi$

Taylors sats: $\quad e^{\varphi(x)} = e^{\varphi(0)} + \varphi'(0)e^{\varphi(0)}x + \frac{1}{2}(\varphi''(0)+\varphi'(0)^2)e^{\varphi(0)}x^2 + O(x^3)$

$\leadsto \frac{e^{\varphi(x)} - (\cos x + \sin x)}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{(e^{\varphi(0)}-1) + (\varphi'(0)e^{\varphi(0)}-1)x + \frac{1}{2}(\varphi''(0)+\varphi'(0)^2+1)x^2 + O(x^3)}{\cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) - \cancel{1}}$

(För att gränsvärdet skall existera: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.)

$\xrightarrow{x\to 0} I_4 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\varphi''(0) + \varphi'(0)^2 + 1) = \varphi''(0) + 2$

---

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{1}{k!}}_{=b_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)!}}_{=b_{k+1}}\right) \overset{\text{teleskoperande!}}{=} \underbrace{b_1}_{=1} - \underbrace{b_{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} I_5 = 1$

---

6. Fix $\varepsilon > 0$: $\int_0^\infty \frac{\sin\pi x}{1+x^n}\,dx = \underbrace{\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\sin\pi x}{1+x^n}\,dx}_{\xrightarrow[\text{likf. konv. av integrand}]{} \int_0^{1-\varepsilon}\sin\pi x\, dx} + \underbrace{\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{\sin\pi x}{1+x^n}\,dx}_{|\cdot|\le\varepsilon} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin\pi x}{1+x^n}\,dx}_{\le \int_1^\infty \frac{dx}{x^n}\to 0,\ n\to\infty}$

$\leadsto I_6 = \int_0^1 \sin\pi x\, dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

---

7. Taylors sats: $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \le \underbrace{\frac{1}{2}\max_{|y|\le 1/2}|f''(y)|}_{<+\infty}|h| \to 0 \leadsto I_7(f) = f'(0) = -2$

för alla små x, h.