Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
14 januari 2022, kl. 14.00-18.00

Examinator: Michael Björklund, 072-8586787

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 7 uppgifter (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Bestäm lösningen y till randvärdesproblemet:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \ y(1) = 0.$$

LEDTRÅD: Ansätt $y(x) = u(x)e^{rx}$ för någon lämplig konstant r. (6p)

2. Låt y beteckna lösningen till intitalvärdesproblemet:

$$(1 + x^2)y'(x) = 1 + y(x)^2, \quad y(0) = 1.$$

Beräkna vänstergränsvärdet $I_2 := \lim_{x \to 1^-} (1 - x)\, y(x)$.

HJÄLP: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ för alla α och β för vilka nämnaren i högerledet är nollskild. (7p)

3. Visa att

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e^{-k^2/n} = \sqrt{\pi}.$$

LEDTRÅD: För varje n, jämför summan ovanifrån och underifrån med integralen av funktionen $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ från 0 till n. Använd instängningsprincipen. Du får också använda att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

utan bevis. (8p)

4. Beräkna gränsvärdet:

$$I_4 := \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 + 2\ln(1+x)) - 2\arctan(x) - \frac{1}{2}\sin(x^4)}{(1-\cos x)^2}$$

(8p)

5. Beräkna $I_5 := \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^2 - 3n)2^{-n}$.

   LEDTRÅD: Bilda $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(n^2 - 3n)x^n$, så att $I_5 = g(1/2)$, och uttryck funktionen g i termer av f, f' och f'', där

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{för alla } |x| < 1.$$

(7p)

6. Beräkna gränsvärdet

$$I_6 := \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

   LEDTRÅD: Fixera $\epsilon > 0$, och skriv

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \underbrace{\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1+x^n}}_{=:A_n(\epsilon)} + \underbrace{\int_{1-\epsilon}^{1} \frac{dx}{1+x^n}}_{=:B_n(\epsilon)} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}}_{=:C_n}.$$

   Visa att

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\epsilon) = 1-\epsilon, \quad B_n(\epsilon) \le \epsilon, \quad \lim_{n\to\infty} C_n = 0.$$

(8p)

7. Visa att gränsvärdet

$$I_7 := \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$

   existerar och beräkna dess värde.

   LEDTRÅD: Du får använda att

$$\frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t, \quad \text{för alla } t > -1,$$

   utan bevis. (6p)

Lösningsförslag (TMA976): Tenta 1 (14 jan-22)

1. $y = u\cdot e^{2x} \rightsquigarrow y' = (u' + 2u)e^{2x},\ y'' = (u'' + 4u' + 4u)\cdot e^{2x},\ u(0) = 1,\ u(1) = 0.$

$\rightsquigarrow y'' - 4y' + 4y = u''\cdot e^{2x} = x\cdot e^{2x} \rightsquigarrow u(x) = x^3/6 + Ax + B \rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 7x + 6)e^{2x}.$

---

2. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \rightsquigarrow \arctan y(x) = \arctan x + \pi/4 \rightsquigarrow y(x) = \tan(\arctan x + \pi/4) = \frac{x+1}{1-x}$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 1^-}(1-x)y(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = \underline{\underline{2}}.$

• definierad för $-\infty < x < 1$

---

3. $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ (avtagande); $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_n(k)$; $f_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_n(x)\,dx \leq f_n(k)\ \forall k$

$\rightsquigarrow s_n \geq \int_1^{n+1} e^{-x^2/n}dx = \sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{(n+1)/\sqrt{n}} e^{-y^2}dy,\quad s_n = e^{-1/n} + \sum_{k=1}^{n-1} f_n(k+1) \leq e^{-1/n} + \sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy$

$\rightsquigarrow \underbrace{2\int_{1/\sqrt{n}}^{(n+1)/\sqrt{n}} e^{-y^2}dy}_{\to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}} \leq \frac{2s_n}{\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{2e^{-1/n}}{\sqrt{n}}}_{\to 0} + \underbrace{2\int_{1/\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy}_{\to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2s_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$ ✲

Inklämningsprincipen!

---

4. $x^2 + 2\cdot\ln(1+x) = x^2 + 2(x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + O(x^5)) = 2x + 2x^3/3 - x^4/2 + O(x^5) =: y$

$\rightsquigarrow y^3 = 8x^3 + O(x^5) \rightsquigarrow \sin(x^2 + 2\cdot\ln(1+x)) = 2x + 2x^3/3 - x^4/2 - \frac{8}{6}x^3 + O(x^5) = 2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + O(x^5)$

• $-2\arctan x - \frac{1}{2}\sin x^4 = -2(x - x^3/3 + O(x^5)) - \frac{1}{2}(x^4 + O(x^{12})) = -2x + \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{2}x^4 + O(x^5)$

• $(1-\cos x)^2 = (\cancel{1} - (\cancel{1} - x^2/2 + O(x^4)))^2 = \frac{x^4}{4} + O(x^6)$

$\rightsquigarrow \frac{\sin(x^2 + 2\cdot\ln(1+x)) - 2\arctan x - \frac{1}{2}\sin x^4}{(1-\cos x)^2} = \frac{-x^4 + O(x^5)}{x^4/4 + O(x^5)} \xrightarrow[x\to 0]{} \underline{-4}.$

---

5. $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(n^2 - 3n)x^n = x^2\cdot\Big(\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n^2\cdot x^{n-2}}_{=A(x)} - 3\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot x^{n-2}}_{=B(x)}\Big)$ – VILL: $g(1/2) = ?$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1},\ |x|<1:\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = 1 + x\cdot\underbrace{\Big(\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot x^{n-2}\Big)}_{=B(x)} = (1-x)^{-2}$

$\rightsquigarrow B(x) = ((1-x)^{-2} - 1)/x \rightsquigarrow B(1/2) = \underline{6}.$ $\Big\}$ $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = A(x) - B(x) = 2(1-x)^{-3}$

$\rightsquigarrow A(1/2) = B(1/2) + 16 = \underline{22} \rightsquigarrow g(1/2) = \frac{1}{4}(A(1/2) - 3B(1/2)) = \frac{1}{4}(22 - 3\cdot 6) = \underline{\underline{1}}.$

---

6. Fix $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 1$ (likformigt på $[0, 1-\varepsilon]$) $\rightsquigarrow A_n(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1+x^n} \to \int_0^{1-\varepsilon} 1\,dx = 1-\varepsilon,\ n\to\infty$

$B_n(\varepsilon) = \int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{dx}{1+x^n} \leq \int_{1-\varepsilon}^{1} 1\,dx = \varepsilon,\quad C_n \leq \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^n} = \Big[-\frac{x^{-(n-1)}}{n-1}\Big]_1^{\infty} = \frac{1}{n-1} \to 0,\ n\to\infty$

$\rightsquigarrow |A_n(\varepsilon) + B_n(\varepsilon) + C_n - 1| \leq \underbrace{|A_n(\varepsilon) - 1|}_{\to 0} + \varepsilon + \underbrace{C_n}_{\to 0}:\quad \limsup_{n\to\infty}\Big|\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} - 1\Big| \leq \varepsilon$ ✲

godtyckligt!

---

7. $I_7 := \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot\ln(1+x)}{x^2+y^2} = \{\text{pol. koord}\} = \lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}}\,\cos^2\theta\cdot\ln(1+r\cos\theta) \to \underline{\underline{0}}$

$|\cdot| \leq r \quad \forall\theta$

$\to 0$

$|\underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1}\cdot\ln(1+r\cos\theta)| \leq |r\cos\theta| \leq r$

$\ln(1+t) \leq t$

$\forall |t| < 1$