Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
19 augusti 2021, kl. 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på <u>6 uppgifter</u> (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Betrakta initialvärdesproblemet

$$y''(x) - (1+x^2)y(x) = x, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0.$$

Bestäm gränsvärdet $\alpha := \lim_{x\to\infty} y(x)e^{-x^2/2}$.

Ledtråd: Finn två funktioner u och v sådana att

$$y'' - (1+x^2)y = \underbrace{(y' - u(x)y)'}_{=z'} - v(x)\underbrace{(y' - u(x)y)}_{=:z},$$

och lös den resulterande differentialekvationen för z. Identiteten

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

får användas utan bevis. (8p)

2. Givet ett reellt tal λ, låt y_λ beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$x^2\, y'_\lambda(x) = (x^2 + y_\lambda(x)^2)/2, \quad y_\lambda(1) = \lambda.$$

a) Bestäm, för varje λ, lösningen y_λ, samt det maximala intervall av formen $[1, T_\lambda]$ som denna lösning är definierad på. (8p)

b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} y_\lambda(x)/x$ för $\lambda < 1$.

Ledtråd: Finn en differentialekvation för $z_\lambda = y_\lambda/x$. (2p)

3. Beräkna gränsvärdet

$$I := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=N}^{2N} \sin^2((n-N)/2N)$$

Ledtråd: Tillämpa integralkriteriet på en lämplig växande funktion. (10p)

4. Låt $\varphi : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ beteckna en tre gånger kontinuerligt deriverbar funktion som uppfyller $\varphi(0) = \varphi(1)$. Bestäm $\varphi'(0)$ så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(\cos x) - \varphi(\sin x)}{x^2}$$

existerar och beräkna detta gränsvärde som en funktion av $\varphi'(1)$ och $\varphi''(0)$. (8p)

5. Låt $n_1, n_2, \ldots$ vara en strikt växande följd av positiva heltal med följande egenskaper:

(i) n_k udda om och endast om k är udda.

(ii) $c := \lim_{k\to} n_k/k > 0$.

För vilka reella x konvergerar potensserien

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{j}} \cdot x^{n_k} \;\; ?$$

Ange för varje sådant x om konvergensen är absolut eller betingad. (8p)

6. Visa att

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ledtråd: Taylorutvecka ln. (6p)

1. $y''(x) - (1+x^2)y(x) = x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)e^{-x^2/2} = ?$

Lösning:

$$(\underbrace{y'-x\cdot y}_{=z'})' + x\cdot(\underbrace{y'-x\cdot y}_{=z}) = y'' - y - \cancel{x\cdot y'} + \cancel{x\cdot y'} - x^2\cdot y = y'' - (1+x^2)y = x \quad (z(0)=0)$$

$$\rightsquigarrow (z\cdot e^{x^2/2})' = x\cdot e^{x^2/2} \overset{[z(0)=0]}{\rightsquigarrow} z(x)e^{x^2/2} = e^{x^2/2} - 1 \rightsquigarrow z(x) = 1 - e^{-x^2/2}$$

$$\rightsquigarrow y' - x\cdot y = 1 - e^{-x^2/2} \rightsquigarrow (y\cdot e^{-x^2/2})' = e^{-x^2/2} - e^{-x^2} \overset{[y(0)=0]}{\rightsquigarrow} y(x) = e^{x^2/2}\cdot\int_0^x (e^{-t^2/2} - e^{-t^2})\,dt$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} y(x)e^{-x^2/2} = \int_0^\infty (e^{-t^2/2} - e^{-t^2})\,dt = (\sqrt{2}-1)\cdot\underbrace{\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt}_{=\sqrt{\pi}/2 \text{ (givet!)}} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \alpha$$

2. $x^2\cdot y_\lambda'(x) = \frac{1}{2}(y_\lambda^2(x) + x^2)$, $y_\lambda(1) = \lambda$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y_\lambda(x)}{x} =: f(\lambda) = ?$ ($\lambda < 1$)

Lösning:

$z_\lambda = y_\lambda/x$, $z_\lambda(1) = \lambda$: $\quad y_\lambda' = x\cdot z_\lambda' + z_\lambda = \frac{1}{2}x^2\cdot(z_\lambda(x)^2+1)/x^2 = \frac{1}{2}(z_\lambda^2+1)$

$\iff y_\lambda = x\cdot z_\lambda$

$$\rightsquigarrow x\cdot z_\lambda' = \frac{1}{2}(z_\lambda - 1)^2 \rightsquigarrow (z_\lambda-1)^{-2}\cdot z_\lambda' = 1/2x \rightsquigarrow -(z_\lambda-1)^{-1} = c_\lambda + \frac{1}{2}\ln x$$

$$\rightsquigarrow z_\lambda = 1 - \frac{1}{c_\lambda + \frac{1}{2}\ln x}, \quad z_\lambda(1) = 1 - 1/c_\lambda = \lambda \rightsquigarrow$$

$c_\lambda - 1 = \lambda\cdot c_\lambda \rightsquigarrow c_\lambda(1-\lambda) = 1$ om $\lambda < 1$ $\rightsquigarrow c_\lambda = 1/(1-\lambda) > 0$

$$z_\lambda = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{1-\lambda}}, \quad T_\lambda = +\infty$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} z_\lambda(x) = 1.$$

$\lambda = 1$: $T_1 = \infty$, $y_1(x) = x$, $\lim\limits_{x\to\infty} y_1(x) = \infty$.

$\lambda > 1$: $c_\lambda = -\frac{1}{\lambda-1} < 0$, $z_\lambda(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{\lambda-1}}$ existerar om $\frac{1}{2}\ln x < \frac{1}{\lambda-1}$

$\iff x < e^{2/\lambda-1} = T_\lambda$

3. $S_N := \sum_{n=N}^{2N} f(n/N)$, $f(x) = \sin^2((x-1)/2)$,

Obs: $f'(x) = \sin((x-1)/2)\cos((x-1)/2) = \frac{1}{2}\sin(x-1) \geq 0 \quad \forall x \in [1,3]$

$\rightsquigarrow$ f växande på $[1,3]$. !

$$\rightsquigarrow \quad \underset{[1,3]}{f(n/N)} \leq \int_n^{n+1} \underset{[1,3]}{f(x/N)}\,dx \leq \underset{[1,3]}{f\left(\frac{n+1}{N}\right)} \quad \forall N \leq n \leq 2N$$

$$\rightsquigarrow \quad S_N \leq \underbrace{\int_N^{2N+1} f(x/N)\,dx}_{= N \cdot \int_1^{2+1/N} f(x)\,dx} < \sum_{n=N}^{2N} f\left(\frac{n+1}{N}\right) = S_N - f(1) + f\left(\frac{2N+1}{N}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad S_N/N \leq \int_1^{2+1/N} f(x)\,dx \leq S_N/N + \underbrace{\left(\frac{f(2N+1) - f(1)}{N}\right)}_{\to 0} \quad (f \text{ begränsad!})$$

jämförelse!

$$\rightsquigarrow \quad \lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{N} = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \sin^2((x-1)/2)\,dx = \int_0^1 \sin^2(x/2)\,dx = \left\{ \sin^2 y = \frac{1}{2}(1-\cos 2y) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\sin x]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\sin 1).$$

4. $\psi(x) := \varphi(\cos x) - \varphi(\sin x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x^2} = ?$

$\varphi(0) = \varphi(1)$

$\rightsquigarrow$ $\psi(0) = 0$, $\psi'(x) = -\sin x \cdot \varphi'(\cos x) - \cos x \cdot \varphi'(\sin x)$

$\psi'(0) = 0 - \varphi'(0) \overset{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varphi'(0) = 0.$

annars existerar inte gränsvärdet!

$$\rightsquigarrow \quad \psi''(x) = \sin^2 x \cdot \varphi'(\cos x) - \cos x \cdot \varphi'(\cos x) - \cos^2 x \cdot \varphi''(\sin x) + \sin x \cdot \varphi'(\sin x)$$

$$\rightsquigarrow \quad \psi''(0) = 0 - \varphi'(1) - \varphi''(0) + 0 = -(\varphi'(1) + \varphi''(0)).$$

Taylor: $\psi(x) = \frac{\psi''(0)}{2} \cdot x^2 + O(x^3) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x^2} = \frac{\psi''(0)}{2} = -\frac{1}{2}(\varphi'(1) + \varphi''(0))$,

förutsatt att $\varphi'(0) = 0$

5. (n_k) växande heltalsföljd, $\frac{n_k}{k} \to c > 0$, $k \to \infty$, n_k udda $\iff$ k udda.

$a_k := e^{-\sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{j}}$, $k \geq 1$.

• Potensserie: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{n_k}$, Konvergensradie $R := \Big(\limsup_{k\to\infty} \underbrace{|a_k|^{1/n_k}}_{= e^{-\frac{1}{n_k}\overbrace{\sum_{j=1}^{n_k}\frac{1}{j}}^{\sim \log n_k}} \to 1}\Big)^{-1} = 1.$

$x = 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\overbrace{\sum_{j=1}^{n_k}\frac{1}{j}}^{\leq \log n_k + C}}$ för ngn. konstant C (t.ex. integralkriteriet!)

$\geq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}\Big) e^{-C}$

$\to \infty$ divergent enligt jämförelsekriteriet då $\frac{n_k}{k} \to c > 0$.

$\Rightarrow$ Potensserien divergent för $x = 1$.

$x = -1$: (a_k) avtagande, $(-1)^{n_k} = (-1)^k \;\forall k$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ (betingat) konvergent enligt Leibniz!

6. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-x \Leftrightarrow x = 1-u \\ dx = -du,\ u: 1 \to 0 \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u}\,du = \left\{ -\ln(1-u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k} \quad \forall |u|<1 \right\}$

$= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{k}\Big)du = \lim_{\lambda\to 1^-} \int_0^{\lambda} \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{k}\Big)}_{\substack{\text{konvergerar likformigt} \\ \text{på } [0,\lambda],\ \lambda<1 \text{ enligt} \\ \text{Weierstraß M-test!}}} du = \lim_{\lambda\to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\lambda} \frac{u^{k-1}}{k}\,du}_{= \frac{\lambda^k}{k^2}}$

$= \lim_{\lambda\to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k^2} \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

• Måste visa: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda^k)}{k^2} \to 0$, $\lambda \to 1^-$

• Fixera $\varepsilon > 0$, välj $K_\varepsilon \geq 1$ s.a. $\sum_{k \geq K_\varepsilon} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$

$0 \leq \cdot = \underbrace{\sum_{k=1}^{K_\varepsilon - 1} \frac{(1-\lambda^k)}{k^2}}_{\to 0,\ \text{då } \lambda \to 1^-} + \underbrace{\sum_{k=K_\varepsilon}^{\infty} \frac{(1-\lambda^k)}{k^2}}_{\leq \sum_{k\geq K_\varepsilon} \frac{1}{k^2} < \varepsilon \ \forall \lambda \in (0,1)} \Rightarrow 0 \leq \limsup_{\lambda \to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda^k)}{k^2} < \varepsilon$

ε godtyckligt!

$\Rightarrow \lim_{\lambda\to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

AH: $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k / k^2$ kontinuerlig på $[0,1]$ enligt Weierstraß M-test

$\Rightarrow \lim_{\lambda \to 1} \varphi(\lambda) = \varphi(1)$