Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
8 april 2021, kl. 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på <u>8 uppgifter</u> (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 1.$$

(5p)

2. Givet ett reellt tal λ, låt y_λ beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$(1 + x^2)y'_\lambda(x) = 1 + y_\lambda(x)^2, \quad y_\lambda(0) = \lambda.$$

Bestäm den lösning y_λ som uppfyller $y_\lambda(1) = 1/\sqrt{3} = \tan(\pi/6)$. (6p)

3. Visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2/3} \geq e^{-1/3} + \frac{3}{2}e^{-4/3}.$$

(8p)

4. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-3)^k x^{2^k}?$$

Ange även om konvergensen är absolut eller betingad. (5p)

5. Antag att $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ är en strikt växande sekvens av reella tal som uppfyller $\lambda_k \to \infty$ då $k \to \infty$, och att $a_1, a_2, \ldots$ är en sekvens av komplexa tal sådana att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Definiera funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ enligt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Visa att gränsvärdet

$$c(\lambda) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x}\, dx,$$

existerar för varje reellt λ, och beräkna detta gränsvärde (som funktion av parametern λ). (8p)

6. Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x,y\neq 0}} \frac{(x^2+y^3)\sin(x)}{(x^4+y^2)\sin(y)}$$

existerar. Om det existerar så ska även detta gränsvärde beräknas. (3p)

7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan(x)}{\sin(x^4)}.$$

(7p)

8. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har en kontinuerlig derivata på intervallet $[0,1]$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

Ledtråd: Integrera partiellt. (8p)

Lösningsförslag Tenta II /2020-21 (TMA976) 1

1. Kar. rötter: $r_1=1$, $r_2=2$; Ansatz: $y(x)=Ae^{x}+Be^{2x}+C$ $\left(\rightsquigarrow \underline{C=1/2}\right)$

$y(0)=A+B+1/2=0$, $y(1)=Ae+Be^2+1/2=1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1\\e&e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\frac{1}{e^2-e}\begin{pmatrix}e^2&-1\\-e&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2(e^2-e)}\begin{pmatrix}-e^2-1\\e+1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(x)=-\frac{(1+e^2)}{2(e^2-e)}e^{x}+\frac{(1+e)}{2(e^2-e)}e^{2x}+\frac{1}{2}$$

---

2. $\dfrac{y'}{1+y^2}=\dfrac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow \arctan y(x)=C+\arctan x$ $\quad(\arctan\lambda = C\in(-\pi/2,\pi/2))$

$\rightsquigarrow y(x)=\tan(\arctan\lambda+\arctan x) \rightsquigarrow y(1)=\tan(\overbrace{\arctan\lambda+\pi/4}^{=\pi/6})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow \arctan\lambda=\pi/6-\pi/4=\underline{\underline{-\dfrac{\pi}{12}}} \Rightarrow y(x)=\tan(\arctan x-\pi/12)$.

---

3. $f(x)=xe^{-x^2/3}$, $f'(x)=(1-2x^2/3)e^{-x^2/3}<0 \iff x>\sqrt{\tfrac{3}{2}}>1$.

$\rightsquigarrow f$ avtagande för $x\geq 2$: $f(k)\geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx$ $\forall k\geq 2$.

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)=f(1)+\sum_{k=2}^{\infty}f(k)\geq f(1)+\int_2^{\infty}f(x)\,dx=e^{-1/3}+\underbrace{\int_2^{\infty}xe^{-x^2/3}\,dx}_{=\left[-\frac{3}{2}e^{-x^2/3}\right]_2^{\infty}}$$

$$=e^{-1/3}+\frac{3}{2}e^{-4/3}$$

---

4. $a_n=\begin{cases}(-3)^k & n=2^k,\ k\geq 1\\ 0 & \text{annars.}\end{cases} \sim |a_n|^{1/n}=\begin{cases}\underbrace{|3|^{k/2^k}}_{\to 1,\ k\to\infty} & n=2^k\\ 0 & \text{annars}\end{cases}$

$\rightarrow R:=\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}=1$. $\rightsquigarrow$ Absolut konvergens då $|x|<1$

$\underline{x=\pm 1}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(-3)^k}_{\not\to 0}$ konvergerar ej!

---

5. Weierstrass M-test: $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{i\lambda_k x}$ konvergerar likformigt $\forall x$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_k-\lambda)x}\,dx\right)$$ [Integration termvis].

$$=\begin{cases}1 & \text{om } \lambda_k=\lambda\\ \underbrace{\dfrac{e^{i(\lambda_k-\lambda)T}-1}{i(\lambda_k-\lambda)T}}_{\to 0 \text{ då } T\to\infty} & \text{om } \lambda_k\neq\lambda\end{cases}$$

Tydligt: $c(\lambda)=\begin{cases}a_k & \text{om } \lambda_k=\lambda\\ 0 & \text{om } \lambda_k\neq\lambda\ \forall k\end{cases}$

Obs: $$\left|\sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k\neq\lambda}}^{\infty}a_k\left(\frac{e^{i(\lambda_k-\lambda)T}-1}{i(\lambda_k-\lambda)T}\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|\cdot 2}{|\lambda_k-\lambda|T}\leq\begin{cases}\text{Då } \lambda_k\to\infty \text{ och } \lambda_k\neq\lambda\ \forall k\\ |\lambda_k-\lambda|\geq\delta>0\ \forall k\end{cases}$$

$$\leq\underbrace{\frac{2}{\delta}}_{<+\infty}\cdot\frac{1}{T}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|}_{<+\infty}\to 0,\ \text{då } T\to\infty.$$

6. $y = kx$; $k \neq 0$

$$\frac{(x^2 + y^3)\sin x}{(x^4 + y^2)\sin y} = \frac{(x^2 + k^3 x^3)\sin x}{(x^4 + k^2 x^2)\sin kx} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{k^3} \leftarrow \text{beror av } k!$$

$\rightarrow$ Gränsvärdet existerar ej!

---

7. $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{4} + O(x^6)$, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$

$$\rightsquigarrow \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan x}{\sin(x^4)} = \frac{(\cancel{x^2} - x^4/4 + O(x^6)) - (\cancel{x^2} - x^4/3 + O(x^6))}{x^4} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin(x^4)}{x^4}\right)^{-1}}_{\to 1}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

---

8. $$n\int_0^1 f(x)\,x^n\,dx = n\left(\left[\frac{x^{n+1} f(x)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 f'(x)\,x^{n+1}\,dx\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\to 1} f(1) - \frac{n}{n+1}\cdot \int_0^1 f'(x)\,x^{n+1}\,dx$$

$< +\infty$ (då f' är kontinuerlig!)

$$|\cdot| \le \frac{\max_{x\in[0,1]} |f'(x)|}{n+1} \rightarrow 0$$

$\rightarrow \underline{\underline{f(1)}}.$