

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
15 januari 2021, kl. 14.00-18.00

Examinator: Michael Björklund

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT.

Totalt 50 poäng, fördelade på 6 uppgifter (3 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Givet $\lambda > 0$, låt $y_\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beteckna lösningen till differentialekvationen

$$y_\lambda(0) = y'_\lambda(0) = 0, \quad y''_\lambda(x) + \lambda^2 y_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0.$$

a) Visa att $y_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x \frac{\sin(\lambda u)}{1+(x-u)^2} du$ för alla $x \geq 0$. (7p)

b) Visa att $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 y_\lambda(1/\lambda) = 1 - \cos(1)$. (5p)

OBSERVERA: Om du inte vill använda dig av förskjutningsmetoden i a) så räcker det (för att erhålla full poäng på uppgiften) att endast verifiera att funktionen y_λ ovan är en lösning till differentialekvationen (med begynnelsevillkoren). I detta fall kan additionslagen för sinus vara till nytta:

$$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v), \quad \text{för alla } u, v.$$

OBSERVERA: Du får i b) använda dig av formeln i a) även om du inte har visat den.

2. Låt $y : (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2}) \rightarrow \mathbb{R}$ beteckna lösningen till differentialekvationen

$$y(1) = 0, \quad y'(x) = \frac{1+y^2(x)}{x}, \quad x \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2}).$$

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow e^{\pi/2}} y(x) \cos(\ln x). \quad (7p)$$

3. Fixera $\lambda > 1$, och antag att $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ är en avtagande funktion som uppfyller

$$\int_1^x f(t) dt \geq \lambda \ln(1+x), \quad \text{för alla } x \geq 2.$$

Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sum_{k=1}^n f(k)} \leq \frac{2^{-(\lambda-1)}}{\lambda-1}. \quad (\text{U})$$

LEDTRÅD: Använd integralkriteriet (två gånger).

OBSERVERA: Om du tycker att uppgiften är för svår så erhålls ändå 6 poäng om uppskattningen (U) endast visas för funktionen $f(t) = 2\lambda/t$.

OBSERVERA: Om du tycker att uppgiften är för svår så erhålls ändå 5 poäng om du kan visa att summan (U) är ändlig för alla $\lambda > 1$. (7p)

4. Bestäm reella konstanter a och b med egenskapen att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x + \ln(1+x)) - (ax+b) \arctan^2(x)}{\cos(x) - 1 + \sin^2(x)/2}$$

existerar (och är ändligt), och beräkna detta gränsvärde.

OBSERVERA: Taylorapproximationer för $\sin$, $\cos$, $\arctan$ och $\ln$ behöver inte härledas utan kan användas fritt. Var dock noga med att ange vilka approximationer som du använder. (10p)

5. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k} + k(-1)^k}?$$

Avgör även huruvida konvergensen är absolut eller betingad för de x som du anger.

LEDTRÅD: Förläng med konjugatet av nämnaren, och dela upp i två summor som analyseras separat. (8p)

6. Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ |x| \neq |y|}} \frac{\sin(x-y) \ln(1+x+y)}{e^{x^2-y^2} - 1}$$

existerar. Om det existerar så ska även detta gränsvärde beräknas. (6p)

Lösningssförslag TNA976

Tentamen 1 (2020-21)

15 Januari, 2021

$$1. \quad a) \quad y''_{\lambda}(x) + \lambda^2 y_{\lambda}(x) = \underbrace{(y'_{\lambda} + i\lambda y_{\lambda})'}_{=: z'_{\lambda}}(x) - i\lambda \underbrace{(y'_{\lambda} + i\lambda y_{\lambda})}_{=: z_{\lambda}}(x)$$

$$= z'_{\lambda}(x) - i\lambda z_{\lambda}(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad z_{\lambda}(0) = 0.$$

$$\Rightarrow z_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x} \int_0^x \frac{e^{-i\lambda t}}{1+t^2} dt =: e^{i\lambda x} \cdot \varphi_{\lambda}(x)$$

$$\Rightarrow y'_{\lambda}(x) + i\lambda y_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x} \varphi_{\lambda}(x), \quad y_{\lambda}(0) = 0.$$

$$\Rightarrow y_{\lambda}(x) = e^{-i\lambda x} \int_0^x e^{i\lambda t} \cdot e^{i\lambda t} \varphi_{\lambda}(t) dt$$

$$= e^{-i\lambda x} \int_0^x e^{2i\lambda t} \varphi_{\lambda}(t) dt$$

$$= e^{-i\lambda x} \left(\left[\frac{e^{2i\lambda t} \cdot \varphi_{\lambda}(t)}{2i\lambda} \right]_0^x - \frac{1}{2i\lambda} \int_0^x e^{2i\lambda t} \varphi'_{\lambda}(t) dt \right)$$

partielle integration!

$$= \frac{e^{2i\lambda x} \varphi_{\lambda}(x)}{2i\lambda} = \int_0^x e^{i\lambda t} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2i\lambda} \left(e^{i\lambda x} \int_0^x \frac{e^{-i\lambda t}}{1+t^2} dt - e^{-i\lambda x} \int_0^x \frac{e^{i\lambda t}}{1+t^2} dt \right)$$

$$= \int_0^x \frac{e^{i\lambda(x-t)}}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{e^{-i\lambda(x-t)}}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{1+t^2} dt = \left\{ u = x-t, \quad du = -dt, \quad u: x \rightarrow 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^x \frac{\sin \lambda u}{1+(x-u)^2} du, \quad \forall x \geq 0$$

$$b) \quad y_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\sin \lambda u}{1+\left(\frac{1}{\lambda}-u\right)^2} du = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\sin \lambda u}{1+\frac{1}{\lambda^2}(1-\lambda u)^2} du = \begin{cases} \lambda x = 2 \\ \lambda p = \lambda \\ \lambda: 0 \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \frac{\sin z}{1+(1-z)^2} dz = \int_0^1 \frac{\sin z}{\lambda^2 + (1-z)^2} dz$$

$$\lambda^2 y_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^1 \frac{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (1-z)^2} \sin z}{\lambda^2 + (1-z)^2} dz \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin z dz = 1 - \cos 1$$

Uniformst. pd. [0,1]

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 y_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \cos 1$$

$$\left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (1-z)^2} - 1 \right| \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad \forall z \in [0,1]$$

||0||

1*. Alternativ lösning a) [Verifiera att den föreslagna lösningen är en lösning] 1*

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin \lambda u}{1+(x-u)^2} du = \{y = x - u\}$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-y)}{1+y^2} dy$$

$$= \{ \sin \lambda(x-y) = \sin \lambda x \cdot \cos \lambda y - \cos \lambda x \cdot \sin \lambda y \}$$

↖ additionstecken för sin!

$$= \frac{1}{x} \left(\sin \lambda x \cdot \int_0^x \frac{\cos \lambda y}{1+y^2} dy + \right. A_\lambda(x)$$

$$\left. - \cos \lambda x \cdot \int_0^x \frac{\sin \lambda y}{1+y^2} dy \right) B_\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{x} (\sin \lambda x \cdot A_\lambda(x) - \cos \lambda x \cdot B_\lambda(x))$$

Obs: $A'_\lambda(x) = \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}$, $B'_\lambda(x) = \frac{\sin \lambda x}{1+x^2}$

(Ind. kalkyl
fund. sats)

$$\Rightarrow y'_\lambda(x) = \frac{1}{x} \left(\lambda \cos \lambda x \cdot A_\lambda(x) + \sin \lambda x \cdot \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} \right.$$

$$\left. + \lambda \sin \lambda x \cdot B_\lambda(x) - \cos \lambda x \cdot \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} \right)$$

$$= \cos \lambda x \cdot A_\lambda(x) + \sin \lambda x \cdot B_\lambda(x)$$

produktregel!

$$\Rightarrow y''_\lambda(x) = -\lambda \sin \lambda x \cdot A_\lambda(x) + \frac{\cos^2 \lambda x}{1+x^2}$$

$$+ \lambda \cos \lambda x \cdot B_\lambda(x) + \frac{\sin^2 \lambda x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \lambda \left(\sin \lambda x \cdot A_\lambda(x) - \cos \lambda x \cdot B_\lambda(x) \right) = \frac{1}{1+x^2} - \lambda^2 y_\lambda(x)$$

$\Rightarrow$

$$y''_\lambda(x) + \lambda^2 y_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2} - \lambda^2 y_\lambda(x) + \lambda^2 y_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y_\lambda(0) = 0, \quad y'_\lambda(0) = A_\lambda(0) = 0.$$

2. $\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \arctan y(x) = \ln x + C$

$y(1) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow y(x) = \tan(\ln x)$ on $-\pi/2 < \ln x < \pi/2 \Leftrightarrow x \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$

$\Rightarrow y(x) \cos(\ln x) = \sin(\ln x) \rightarrow \sin(\ln e^{\pi/2}) = 1$

$\stackrel{\text{da}}{\circ} x \rightarrow e^{\pi/2}$

3. • ∇ Antagander ^(Int. krit) $\Rightarrow \nabla(k) \geq \int_k^{k+1} \nabla(t) dt \quad \forall k \geq 1$ [se även 5.4]

$\Rightarrow s_n := \sum_{k=1}^n \nabla(k) \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \nabla(t) dt = \int_1^{n+1} \nabla(t) dt$

• $\int_1^x \nabla(t) dt \geq x \cdot \ln(x+1) \quad \forall x \geq 2$ Antagander!

$\Rightarrow \int_1^{n+1} \nabla(t) dt \geq (n+1) \cdot \ln(n+2) \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{-s_n} \leq \sum_{n=1}^8 \underbrace{e^{-(n+1) \ln(n+2)}}_{=(n+2)^{-n-1}} = \sum_{n=1}^8 (n+1)^{-n}$

• $(n+1)^{-n} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^x} \quad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^8 e^{-s_n} \leq \sum_{n=2}^8 \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^x} = \int_2^9 \frac{dx}{x^x}$

$= \left[\frac{x^{1-x}}{1-x} \right]_2^9 = \frac{9^{1-x}}{1-x} = \frac{2^{1-x-1}}{x-1} \quad \forall x > 1$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \Rightarrow x + \ln(1+x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \Rightarrow$

• $\sin(x + \ln(1+x)) = \sin(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4))$

$= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6} (2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})^3 + O(x^4)$

$= 2x - \frac{x^2}{2} + (\frac{1}{3} - \frac{4}{3})x^3 + O(x^4) = 2x - \frac{x^2}{2} - x^3 + O(x^4)$

• $\sin^2(x + \ln(1+x)) = (2x - \frac{x^2}{2} - x^3 + O(x^4))^2$

$= 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot 2x \cdot x^3 + \frac{x^4}{4} + O(x^5)$

$= 4x^2 - 2x^3 - \frac{15x^4}{4} + O(x^5)$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \rightarrow$$

$$\arctan^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6)$$

$$\begin{aligned} \cdot (ax+b) \arctan^2 x &= (ax+b) \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6)\right) \\ &= ax^3 - \frac{2ax^5}{3} + bx^2 - \frac{2b}{3}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin^2(x + \ln x) - (ax+b) \cdot \arctan^2 x$$

$$= (4-b)x^2 - (2+a)x^3 - \left(\frac{15}{4} - \frac{2b}{3}\right)x^4 + O(x^6)$$

$$\begin{aligned} \cdot \cos x - 1 + \frac{\sin^2 x}{2} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) - 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + O(x^6) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6}\right)x^4 + O(x^6)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2(x + \ln(1+x)) - (ax+b) \cdot \arctan^2 x}{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} = \begin{matrix} \text{Vgl.} \\ b=4, a=-2 \end{matrix} =$$

$$= - \frac{\left(\frac{15}{4} - \frac{8}{3}\right)x^4 + O(x^6)}{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6}\right)x^4 + O(x^6)} = - \frac{\left(4 + \frac{8}{3}\right) + O(x^2)}{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6} + O(x^2)}$$

$$x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\frac{13}{12}}{-\frac{1}{8}} = \frac{26}{3}$$

$$\text{Var. } a=-2, b=4 \\ \lim = \frac{26}{3}$$

$$5. \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + k(-1)^k}, \quad k \geq 2$$

$$= \frac{\sqrt{k} - k(-1)^k}{k - k^2} = \frac{1 - \sqrt{k}(-1)^k}{\sqrt{k}(1-k)}$$

$$R = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}\right)^{-1} = \underline{1} \Rightarrow$$

$|x| < 1$ absolut konv.
 $|x| > 1$ divergent.

$$\cdot \underline{x=1:} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(1-k)} \quad \text{konv. (Leibniz!)} \quad \text{konv. (Leibniz!)} \quad \text{konv. (Leibniz!)}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(1-k)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}(-1)^k}{\sqrt{k}(k-1)} \Rightarrow \text{Betrags-} \\ \text{konvergenz} \\ \text{ev. Leibniz!}$$

$$\cdot \underline{x=-1:}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k(-1)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}(1-k)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1}$$

konv. abs. $n \rightarrow \infty$
 divergent $n \rightarrow \infty$
 (3.4. mod. t. ex. $k^{-3/2}$)

Divergent

6.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y) \ln(1+x+y)}{|x|+|y|}$

$$\frac{\sin(x-y) \ln(1+x+y)}{e^{x^2-y^2} - 1}$$

korrigiert-regel

$|x|+|y| \Leftrightarrow x \neq y, x \neq -y$

$$\frac{\sin(x-y)}{x-y} \cdot \frac{\ln(1+x+y)}{x+y} \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{e^{x^2-y^2} - 1} \right)$$

Inspektion:

$$\left\{ \begin{array}{l} s := x-y \\ t := x+y \end{array} : (x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow (s,t) \rightarrow (0,0) \right\}$$

$$\frac{\sin s}{s} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{st}{e^{st} - 1} \rightarrow 1 \quad (s,t) \rightarrow (0,0)$$

$\xrightarrow{st \rightarrow 0} 1$

* Alternativ lösung 3) für Funktion $f(t) = \frac{2x}{t}, t \geq 1$

$$B_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \geq 1.$$

Vill uppskatta: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda n}$

Obs: $\frac{1}{(k+1)^a} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a} \quad (k \geq 1, a > 0).$

$$\Rightarrow B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-2\lambda} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2\lambda}}$$

bättre:

$$= 4^{-\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^{-2\lambda} \leq 4^{-\lambda} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{2\lambda}}$$

$$= 4^{-\lambda} + \frac{2^{4-2\lambda}}{2\lambda-1} \quad \forall \lambda > 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{2\lambda-1} \leq \frac{2 \cdot 2^{\lambda}}{\lambda+1} \quad \forall \lambda > 1$$

$$3(\lambda-1) \leq 2 \cdot 2^{\lambda} = 4 \cdot 2^{\lambda-1} \quad \forall \lambda > 1$$

trivialt!

Obs!
Det där är uppskattning jämfört med (*).

