

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
20 Augusti 2020, kl. 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Givet ett reellt α , betrakta initialvärdesproblemet

$$y_\alpha(0) = \alpha \quad \text{och} \quad (1+x^2)y'_\alpha(x) = y_\alpha^2(x) - 3y_\alpha(x) + 2, \quad x > 0.$$

Bestäm (om möjligt) $\alpha < 1$ så att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_\alpha(x) = 2.$$

Om ett sådant α inte existerar skall detta motiveras noggrant. (8p)

2. Betrakta initialvärdesproblemet

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{och} \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}.$$

Bestäm $y(3)$ och gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$. (8p)

3. Bestäm en växande talföljd (b_n) sådan att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=2}^n k \ln k = 1.$$

Talföljden måste anges explicit (inte som en summa eller integral). (8p)

4. Bestäm ett positivt heltal m så att gränsvärdet

$$I_m := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(\arctan(x) - \sin(x)) + \ln(1+x^3)}{x^m}$$

existerar och är ändligt och nollskilt. Beräkna även motsvarande (nollskilda) gränsvärde. (8p)

5. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(x^k - x^{-k})$? (3p)

6. Betrakta funktionsföljden (f_n) som ges av

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{x+k}{n} \right) \sin \left(\left(\frac{x+k}{n} \right)^2 \right), \quad \text{för } x \in [0, 1].$$

Visa att (f_n) konvergerar likformigt på $[0, 1]$ och bestäm gränsfunktionen f .

Ledning: jämför med en lämplig Riemann-summa. (9p)

7. Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0}} \frac{2 \cos(y \sin(x)) - y^2 \cos^2 x - 2}{\sin^2(y)}$$

existerar eller inte. Om det existerar, så skall även dess värde beräknas. (6p)

$$1. \frac{y'_x}{(1-y_x)(2-y_x)} = \left(\frac{1}{1-y_x} - \frac{1}{2-y_x} \right) y'_x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y_x(\infty) = \underline{\alpha < 1}.$$

$$\begin{aligned} \leadsto \ln \left(\frac{2-y_x(x)}{1-y_x(x)} \right) &= \arctan x + C_x \leadsto \frac{2-y_x(x)}{1-y_x(x)} = e^{C_x} \cdot e^{\arctan x} \\ \leadsto y_x(x) &= \frac{2 - \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right) e^{\arctan x}}{1 - \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right) e^{\arctan x}} \end{aligned}$$

$\leadsto e^{C_x} = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow \infty} y_x(x) = \frac{2 - \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right) e^{\pi/2}}{1 - \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right) e^{\pi/2}} =: \beta \leadsto \frac{2-\beta}{1-\beta} = \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right) e^{\pi/2}$$

$$\beta = 2 \Rightarrow \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right) e^{\pi/2} = 0 \quad (\text{Omöjligt om } \alpha < 1)$$

$$2. \begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$= \left(\frac{y'_1 + y'_2}{2} \right)'(x) + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)'(x), \quad y(0) = 0$$

$$\leadsto z(x) = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt = e^{-x} \int_0^{\min(1,x)} e^t dt = e^{-x} (e^{\min(1,x)} - 1).$$

$$\leadsto y(x) = e^{-x} \int_0^x e^t z(t) dt = e^{-x} \cdot \begin{cases} \int_0^x e^t \cdot e^{-t} (e^t - 1) dt = e^{-x} - 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-2} + \int_1^x (e^{-1} - 1) dt = (e^{-2} - 1) + (x-1)(e^{-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x}(e^x - 1 - x) & x \in [0, 1] \\ e^{-x}((e^{-2} - 1) + (x-1)(e^{-1} - 1)) & x > 1 \end{cases}$$

$y(0) = e^{-3}((e^{-2} - 1) + 2(e^{-1} - 1))$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$

$$3. g(x) = x \cdot \ln x, \quad g'(x) = 1 + \ln x > 0, \quad x \geq 1 \leadsto g \text{ växande, } x \geq 1.$$

$$\leadsto g(x) \leq \int_x^{x+1} g(u) du \leq g(x+1) \quad \forall x \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \leadsto A_n &:= \sum_{k=2}^{n+1} g(k) \leq \int_2^{n+1} g(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n+1} g(k) = A_{n+1} - g(0) \\ &= \int_2^{n+1} x \ln x dx = \int_2^{n+1} x^2 \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left\{ u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad u: \ln 2 \rightarrow \ln(n+1) \right\} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} e^{2u} u du = \left[\frac{1}{2} e^{2u} u \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)} - \frac{1}{2} \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} e^{2u} du \\ &= \frac{1}{2} \left((n+1)^2 \ln(n+1) - 4 \ln 2 \right) - \frac{1}{4} \left((n+1)^2 - 4 \right) \end{aligned}$$

$b_n = \lambda \cdot n^2 \ln n \sim \frac{A_n}{b_n} \leq \frac{1}{2\lambda} \left((n+1)^2 \ln(n+1) - 4 \ln 2 - \frac{1}{2} (n+1)^2 + 2 \right) \frac{1}{n^2 \ln n}$ (2)
 $\lambda \text{ konstant} \rightarrow 1$
 $\leq \frac{A_{n+1} - g(2)}{\lambda n^2 \ln n} = \frac{A_n + g(n+1) - g(2)}{b_n}$
 $\rightarrow 0$
 $\sim \frac{A_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{2\lambda} = 1 \text{ om } \lambda = 1/2 \sim b_n = \frac{1}{2} n^2 \cdot \ln n$

4. $6(\arctan x - \ln x) + \ln(1+x^3)$
 $\circ = \begin{cases} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) \\ \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + O(x^9) \end{cases}$
 $\circ = \frac{6(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)) - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + O(x^7) + x^3 - \frac{x^6}{2} + O(x^9)}{x^m}$
 $= \frac{(1-2+1)x^3 + 6(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!})x^5 + O(x^6)}{x^m} = \left\{ \underline{m=5} \right\}$
 $\rightarrow \boxed{6(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}) = \frac{6}{5}(1 - \frac{1}{24}) = \frac{23}{20}}$ [m=5]

5. $\sum_{k \geq 1} \underbrace{2^k(x^k - \frac{1}{2^k})}_{=: q_k(x)} = \sum_{k \geq 1} \left((\frac{x}{2})^k - (\frac{1}{2x})^k \right) < +\infty$
 $\circ$ om $|\frac{x}{2}| < 1$ och $|\frac{1}{2x}| < 1$ (konvergente geom. series) $\rightarrow \frac{1}{2} < |x| < 2$ (Konvergens!)
 $\circ$ $|x| = \frac{1}{2}$ eller $|x| = 2$ så gäller $q_k(x) \rightarrow 0 \leadsto$ Serier konvergerar ej!
 (<) (>2)

6. $g(x) = x \sin x^2$, $P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{x+k}{n}\right)$, $x \in [0, 1]$
 Jämför med Riemannsumman: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x \sin x^2 dx = \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases}$
 $= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin u du = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$
 $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{x+k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \underbrace{\left| g\left(\frac{x+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{\leq C \frac{1}{n} \forall x \in [0,1]}$
 $\leq \frac{C_0}{n} \cdot (n+1) \rightarrow 0$ (konstant fkn!)
 $\leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ (likförmigt på $[0,1]$)

(3)

$$7. \quad \frac{2 \cos(y \sin(x)) - y^2 \cos^2 x - 2}{y^2 \sin^2 x}$$

$$= \left\{ \cos(y \sin(x)) = 1 - \frac{y^2 \sin^2 x}{2} + O(y^4 \sin^4 x) \right\}$$

$$= \frac{-\frac{y^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) + O(y^4 \sin^4 x)}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{\sin x} \right)^2}{\rightarrow 1} \rightarrow \boxed{-1} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$= -1 + O(y^2 \sin^4 x) \rightarrow -1$$