MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2019-04-25, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Per Ljung ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Visa att x^2e^x löser differentialekvationen

$$y^{(4)}(x) - 4y'''(x) + 10y''(x) - 12y'(x) + 5y(x) = 8e^x.$$

Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen.

(7p)

2. Bestäm talen A och a så att differentialekvationen

$$y''(x) + 2(1-x)y'(x) + x(x-2)y(x) = 0$$

efter substitutionen

$$y(x) = e^{v(x)}z(x),\ v(x) = Ax^a$$

övergår i en differentialekvation med konstanta koefficienter. Lös med ledning av detta den ursprungliga differentialekvationen.

(7p)

3. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n})^{\frac{1}{\ln n}}.$$

(6p)

4. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{x^n \ln n}{n(n+2)}$$

absolutkonvergent, betingat konvergent repektive divergent.

(5p)

5. För vilka reella tal x konvergerar serien[1]

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} n^x x^n?$$

(5p)

6. Antag att f_n är kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ och att funktionsföljden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt $[0,1]$. Antag vidare att

$$\begin{cases} g_n'(x) + g_n(x) = f_n(x), \ x \in [0,1] \\ g_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att funktionsföljden $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(6p)

8. Antag att $f \in C^2(I)$, där $I \subset \mathbb{R}$ är ett öppet intervall, och att $f(\alpha) = 0$ där $\alpha \in I$. Antag vidare att $x_0 \in I$ är en startpunkt för Newton-Raphsons metod att denna metod ger en följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i I. Visa att

   (a) $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L}|x_n - \alpha|^2$

   (b) $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L}|x_{n+1} - x_n|^2$

   för $n = 1, 2, 3, \ldots$, där $K = \sup_{x \in I} |f''(x)|$ och $L = \inf_{x \in I} |f'(x)|$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] Detta är ingen potensserie.

Lösningsförslag till tenta TMA976, 2019-04-25

(1) $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = 8e^x$ (*)

Visa att x^2e^x löser (*) och bestäm samtliga lösningar

Lösning: Sätt $y(x) = z(x)e^x$. Insättning i (*) dvs

$P(D)[y(x)] = 8e^x$ där $P(D) = D^4 - 4D^3 + 10D^2 - 12D + 5$

ger (med eller utan förskjutningsregeln)

$$\left(\left((D+1)^4 - 4(D+1)^3 + 10(D+1)^2 - 12(D+1) + 5\right)[z(x)]\right) =$$

$$= (D^4 + 4D^2)[z(x)] = 8$$

Integration ger $z'' + 4z = 4x^2 + ax + b$.

Denna linjära diff-ekv har en partikulärlösning

$z_p(x) = x^2 + Ax + B$ och den allmänna homogenlösningen

$z_h(x) = C\cos(2x) + E\sin(2x)$.

Alltså ges den allmänna lösningen till (*) av

$y(x) = \left(Ax + B + C\cos(2x) + E\sin(2x) + x^2\right)e^x$, $A,B,C,E \in \mathbb{R}$

där vi har att x^2e^x är en lösning till (*).

Svar: $y(x) = (Ax + B + C\cos(2x) + E\sin(2x) + x^2)e^x$

(2) $y'' + 2(1-x)y' + x(x-2)y = 0$

Lös diff-ekv med ansatsen $y(x) = e^{Ax^a} \cdot z(x)$.

Lösning: Derivering av $y(x) = e^{Ax^a} \cdot z(x)$ ger

$y'(x) = e^{Ax^a}\left(Aax^{a-1} z(x) + z'(x)\right)$

$y''(x) = e^{Ax^a}\left((Aax^{a-1})^2 z(x) + 2Aax^{a-1}z'(x) + z''(x) + \right.$

$\left. + Aa(a-1)x^{a-2} \cdot z(x)\right)$

Insättning i diff-ekv ger

$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0$

där $f(x) = 2Aax^{a-1} + 2(1-x)$. Med $a = 2$, $A = \frac{1}{2}$

fås $f(x) = 2$ och $g(x) = 1$. Diff-ekv $z'' + 2z' + z = 0$

har lösningen $z(x) = (Bx + C)e^{-x}$ och alltså har

den ursprungliga diff-ekv lösningen

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - x}(Bx + C), \quad B, C \in \mathbb{R}$$

Svar: $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - x}(Bx + C)$

(3) Beräkna $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n})^{\frac{1}{\ln n}}$.

Lösning: Vi observerar att

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx \le \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \le \int_0^{n+1} \sqrt{x}\,dx$$

då $\sqrt{x}$ är växande funktion. Alltså gäller

$$\frac{2}{3} n^{3/2} \le \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \le \frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$$

Vidare fås

$$\left(\frac{2}{3} n^{3/2}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = e^{\frac{1}{\ln n}\left(\frac{3}{2}\ln n + \ln \frac{2}{3}\right)} = e^{\frac{3}{2} + \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln n}} \to e^{\frac{3}{2}}, \; n \to \infty$$

Då $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1, \; n \to \infty$ gäller

$$\left(\frac{2}{3}(n+1)^{3/2}\right)^{\frac{1}{\ln n}} \to e^{3/2}, \; n \to \infty$$

Svar: $e^{\frac{3}{2}}$

(4) Avgör konvergensen för $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n(n+2)}$

Lösning: Sätt $a_n = \frac{\ln n}{n(n+2)}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Då $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n})}$

$\to 1, \; n \to \infty$ följer att potensserien har konvergensradien

$= 1$. Alltså är potensserien absolutkonvergent för

$|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. För $|x| = 1$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n \ln n}{n(n+2)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(n+2)}. \text{ Då}$$

$$0 \le \frac{\ln n}{n(n+2)} = \frac{\sqrt{n}\ln n}{n+2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

och $\sup_{n \ge 1} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n+2} \equiv C < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergerar

följer att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n(n+2)}$ är absolutkonvergent för

$|x| = 1$

Svar: Potensserien är absolutkonvergent för $|x| \le 1$ och

divergent för $|x| > 1$.

(5) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} n^x \cdot x^n$?

Lösning: Det gäller att

$$|n^x \cdot x^n|^{1/n} = (n^{\frac{1}{n}})^x \cdot |x| \to |x| \ , \ n \to \infty$$

då $n^{\frac{1}{n}} \to 1, \ n \to \infty$ och $t \mapsto t^x$ är kontinuerlig i $t=1$ för fixt x. Rotkriteriet ger att $\sum_{n=1}^{\infty} n^x \cdot x^n$ är absolutkonvergent för $|x|<1$ och då också konvergent.

För $|x|>1$ gäller att $n^x \cdot x^n \not\to 0, \ n \to \infty$ och alltså är serien divergent.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ divergerar

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerar enligt Leibniz konv. kriterium

Svar: Serien konvergerar för $x \in [-1,1)$ och är divergent för övrigt

(6) Antag att $f_n \to f$ likf. på $[0,1]$, $f_n \in C([0,1])$ alla n och

$$(*) \begin{cases} g_n' + g_n = f_n & x \in [0,1] \\ g_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Visa att $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

Lösning: Vi har att e^{+x} är en integrerande faktor till $g_n' + g_n = f_n$ och alltså gäller

$$\frac{d}{dx}(e^x \cdot g_n(x)) = e^x f_n(x) \ , \ x \in [0,1].$$

Integration från 0 till $x \in [0,1]$ ger

$$e^x g_n(x) - g_n(0) = \int_0^x e^t f_n(t)\,dt$$

dvs $g_n(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{n} + e^{-x} \int_0^x e^t f_n(t)\,dt \ , \ n = 1, 2, \ldots$

Sätt $g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)\,dt$. Observera att $f \in C([0,1])$ då $f_n \to f$ likf. på $[0,1]$ och f_n kontinuerliga.

Vidare gäller

$$|g_n(x) - g(x)| = e^{-x} \left| \frac{1}{n} + \int_0^x e^t (f_n(t) - f(t))\,dt \right| \leq$$

$\leq \frac{1}{n} + \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \int_0^x e^t\,dt \leq$

$\leq \frac{1}{n} + e \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)|$

Alltså

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} + e \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \to 0,\ n\to\infty.$$

dvs $g_n \to g$ likf. på $[0,1]$.

Svar: —

(7) se ELW

(8) $f\in C^2(I)$ där $I\subset\mathbb{R}$ öppet intervall.

$f(\alpha) = 0$ där $\alpha\in I$

$x_0\in I$ och $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \in I$, $n = 0,1,2,\ldots$

Visa

a) $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L} |x_n - \alpha|^2$

$n = 1,2,\ldots$

b) $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$

där $K = \sup_{x\in I} |f''(x)|$ och $L = \inf_{x\in I} |f'(x)|$

Bevis: Taylorutveckla f kring $x = x_n$ med restterm på Lagrange form av ordning 2 ger

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2 \quad \ldots (*)$$

där ξ_n ligger mellan x och x_n.

Sätt $x = \alpha$. Detta ger

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\tilde{\xi}_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

dvs $|x_{n+1} - \alpha| = \left|\frac{f''(\tilde{\xi}_n)}{2f'(x_n)}\right| |x_n - \alpha|^2 \leq \frac{K}{2L} |x_n - \alpha|^2$

där vi använt $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

a) är visad

Sätt $x = x_{n+1}$ i $(*)$. Detta ger

$$f(x_{n+1}) = \underbrace{f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)}_{=0} + \frac{f''(\hat{\xi}_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \quad (**)$$

Då $f(x_{n+1}) - \underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f'(\eta_n)(x_{n+1} - \alpha)$ för något η_n mellan x_{n+1} och α får vi

$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{L} |f(x_{n+1})| \leq \{(**)\} \leq$

$\leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$

b) är visad $\boxed{b}$