

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2018-08-23,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Edvin Wedin ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och
motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$xy' + \frac{1}{2}y = y^2, \quad x > 0.$$

(6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right).$$

(5p)

4. Betrakta talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där $a_1 = a$, $a_2 = b$ och

$$a_{n+1} = pa_{n-1} + (1 - p)a_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Bestäm för vilka värden på $a, b, p \in \mathbb{R}$ som talföljden konvergerar.

(6p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^2} x^k$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Sätt $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ och $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ för $x \in [0, \infty)$ och $n = 1, 2, 3, \dots$. Betrakta de tre funktionsserierna $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$. Avgör vilka serier som är likformigt konvergenta på $[0, \infty)$ eller bara punktvis konvergenta på $[0, \infty)$ eller ingetdera.

(7p)

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenstkriterium.

(6p)

8. Antag att f är en deriverbar funktion på $[a, b]$, $a < b$. Enligt medelvärdessatsen för integraler finns för varje $x \in (a, b)$ minst ett $c(x) \in (a, x)$ sådant att

$$\int_a^x f(t) dt = f(c(x))(x - a).$$

Antag att $f'(a) \neq 0$. Visa¹ att $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{c(x)-a}{x-a}$ existerar och är lika med $\frac{1}{2}$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

¹Tips: Betrakta kvoten

$$\frac{\int_a^x f(t) dt - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2}.$$

①
$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Karakteristiska polynomet är

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = (r - 1)(r + 1)(r - i)(r + i)$$

varför $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$.

Begynnelsevärdena ger

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A - B - D = 0 \\ A + B - C = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = 0 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$

② $xy' + \frac{1}{2}y = y^2, x > 0$

Lösning: Separabel diff-ek

$$y' = y(y - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{x}, x > 0$$

För $y \neq 0, \frac{1}{2}$ gäller

$$\frac{1}{y(y - \frac{1}{2})} \cdot y' = \frac{1}{x}$$

Vi har

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x, x > 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(y - \frac{1}{2})} dy &= \int \left(-\frac{2}{y} + \frac{2}{y - \frac{1}{2}} \right) dy = -2\ln|y| + 2\ln|y - \frac{1}{2}| \\ &= \ln \left(\frac{y - \frac{1}{2}}{y} \right)^2 \end{aligned}$$

Detta ger $\ln \left(\frac{y - \frac{1}{2}}{y} \right)^2 = \ln x + C, C \in \mathbb{R}$

Med $C = \ln C', C' > 0$ får

$$\left(\frac{y - \frac{1}{2}}{y} \right)^2 = C'x$$

dvs $y(x) = \frac{1}{2 - \tilde{C}\sqrt{x}}, \tilde{C} \neq 0$

Vidare är $y(x) = 0$ och $y(x) = \frac{1}{2}$ lösningar

Svar: $y(x) = \frac{1}{2 - \tilde{C}\sqrt{x}}, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ och $y(x) = 0$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

Lösung:

$$\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \ln(1+x)} \equiv A$$

Standardbruchform

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2) \quad t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{ges } A &= \frac{\ln(1+x) - \ln(1+x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3))}{\ln(1+x + O(x^2)) \ln(1+x)} = \\ &= \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - (x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3))}{(x + O(x^2))(x + O(x^2))} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+O(x)}{1+O(x)} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Swr: $-\frac{1}{2}$

$$\textcircled{4} \quad a_1 = a, a_2 = b, \quad a_{n+2} + (p-1)a_{n+1} - pa_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Bestimme alle $a, b, p \in \mathbb{R}$ für welche $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Lösung: charakteristisches Polynom für $p \neq 0$

$$\begin{aligned} r^2 + (p-1)r - p &= \left(r + \frac{p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - p = \\ &= \left(r + \frac{p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 = (r+p)(r-1) \end{aligned}$$

Allw. gilt

$$\begin{aligned} a_n &= A(-p)^n + B & n=1, 2, \dots & \text{für } p \neq -1 \\ a_n &= A + Bn & n=1, 2, \dots & \text{für } p = -1. \end{aligned}$$

Fall $p = -1$:

$$\begin{cases} A+B=a \\ A+2B=b \end{cases} \quad \text{ges } \begin{cases} A=2a-b \\ B=b-a \end{cases}$$

Fall $p \neq -1$:

$$\begin{cases} A(-p) + B = a \\ A \cdot p^2 + B = b \end{cases} \quad \text{ges } \begin{cases} A = \frac{1}{p} \left(\frac{p+1}{p+1} a \right) \\ B = \frac{p+1}{p+1} b \end{cases}$$

Schlusfolger, da $p \neq 0$ gilt $a_{n+1} = a_n \quad n=2, 3, 4, \dots$

Inspektion es folgt ges. att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert

für $p=0, a, b \in \mathbb{R}$ beliebig, $p=-1, b=a, a \in \mathbb{R}$

godtyckligt, $p=1$, $b=a$, $a \in \mathbb{R}$ godtyckligt,
 $|p| < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ godtyckliga och $|p| > 1$, $b=a$, $a \in \mathbb{R}$
 godtyckligt

Svar: Konvergens för $a=b$, $p \in \mathbb{R}$ och $|p| < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

⑤ Bestäm de olika konvergens/divergenserna för

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^2} x^k$$

Lösning: Sätt $a_k = \frac{1}{k(\ln(k+1))^2}$ $k=1, 2, \dots$

Vi har $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1$ varför konvergensradien

$R = \frac{1}{1} = 1$. Då $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^2}$

konvergerar, så vi vet att $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ konv.

om $p > 1$, har vi att potensserien är
 absolutkonvergent för $|x| \leq 1$ och divergent för $|x| > 1$

Svar: Absolutkonvergent för $x \in [-1, 1]$ och divergent
 för annat

⑥ $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ $x \in [0, \infty)$, $n=1, 2, \dots$

Angiv likf. konv./punktv. konv./divergens på $[0, \infty)$

för $\sum f_n$, $\sum g_n$, $\sum f_n g_n$

Lösning: Sätt $a_n = \frac{1}{n^2}$ $n=1, 2, \dots$

Det gäller att $|g_n(x)| \leq a_n$, $|f_n(x) \cdot g_n(x)| \leq a_n$

för alla $x \in [0, \infty)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar.

Alltså följer att $\sum g_n$, $\sum f_n g_n$ likformigt
 konvergerar på $[0, \infty)$ enligt Weierstrass M-sats.

Vi noterar att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar.

Alltså, $\sum f_n$ ej ens punktv. konvergent på $[0, \infty)$

[Uppenbart också att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergerar för
 varje $x \geq 0$]

⑦ Se BLW

⑧ Antag f deriverbar på $[a, b)$, $a < b$ och $f'(a) \neq 0$. Låt för varje $x \in (a, b)$ $c(x)$ vara en tal i intervallet (a, x) sådant att

$$\int_a^x f(t) dt = f(c(x))(x-a).$$

(Existensen av en sådant $c(x)$ följer av medelvärdes-satsen för integraler). Visa att $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{2}$.

Beräk: Behåll A som

$$A \equiv \frac{\int_a^x f(t) dt - x f(a) + a f(a)}{(x-a)^2}, \quad a < x < b$$

Det gäller med beräkning enligt ovan att

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x-a)(f(c(x)) - f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f(c(x)) - f(a)}{x-a} = \\ &= \frac{c(x) - a}{x-a} \cdot \frac{f(c(x)) - f(a)}{c(x) - a} \end{aligned}$$

$$\text{Här gäller } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(c(x)) - f(a)}{c(x) - a} = f'(a)$$

L'Hospital på A ger

$$\lim_{x \rightarrow a^+} A = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f'(a).$$

Alltså, då $f'(a) \neq 0$, existerar $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c(x) - a}{x - a}$

$$\text{och } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$