

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2018-04-05,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin ankn 3532

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.

Ange kod på *varje* inlämnat blad.

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.

För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^x} - y \cdot \ln x, & x > 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

(6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

(5p)

4. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

där

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \neq m^2 \text{ alla positiva heltal } m \\ \frac{1}{n} & \text{annars} \end{cases}$$

konvergerar.

(6p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) x^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Låt $g(x)$ beteckna den kontinuerliga funktionen e^x på $\mathbb{R}$. Sätt

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{nx}{n+1}\right), \quad x \in (0, \infty), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

och

$$g_n(x) = g(f_n(x)), \quad x \in (0, \infty), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Avgör om

(a) f_n konvergerar likformigt på $(0, \infty)$

(b) g_n konvergerar likformigt på $(0, \infty)$

(7p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel för $a = 0$ med resttermen på Lagrangeform.

(6p)

8. Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontraktion på $\mathbb{R}$. Visa att

(a) f har en unik fixpunkt på $\mathbb{R}$

(b) för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ kommer följderna av iterat, dvs $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ för $x_{n+1} = f(x_n)$, att konvergera mot fixpunkten.

(7p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

① Lös

$$\begin{cases} y''' + y = \cos^2 x & (*) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 & (**) \end{cases}$$

Lösning:

Karakteristiska polynomet $r^3 + 1 = (r+1)(r^2 - r + 1) =$
 $= (r+1)\left((r - \frac{1}{2})^2 - (i\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right) = (r+1)(r - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(r - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

har nollställena $r_1 = -1, r_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi har den allmänna homogena lösningen

$$y_h(x) = A e^{-x} + B e^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C e^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Högerledet $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$ medför att

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) \quad \text{där}$$

$$y_{p,1}''' + y_{p,1} = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad y_{p,2}''' + y_{p,2} = \frac{1}{2} \cos(2x).$$

Här får att $y_{p,1}(x) = \frac{1}{2} (+.cx)$ och vi antar

$$y_{p,2}(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x).$$

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$8a \sin(2x) - 8b \cos(2x) + a \cos(2x) + b \sin(2x) = \frac{1}{2} \cos(2x)$$

dvs

$$\begin{cases} 8a + b = 0 \\ -8b + a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{dvs} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{130} \\ b = -\frac{4}{65} \end{cases}$$

Den allmänna lösningen till (*) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = A e^{-x} + B e^{\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C e^{\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{130} \cos(2x) - \frac{4}{65} \sin(2x),$$

Villkoren (**) bestämmer A, B och C. Vi har

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{2} + \frac{1}{130} = 0 \\ -A + \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{8}{65} = 0 \\ A + (\frac{1}{4} - \frac{3}{4})B + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{4}{130} = 0 \end{cases}$$

Detta ger

$$\begin{cases} A + B = -\frac{33}{65} \\ A - \frac{1}{2}B - \frac{\sqrt{3}}{2}C = -\frac{8}{65} \\ A - \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C = \frac{2}{65} \end{cases} \quad \text{lös} \quad \begin{cases} A = -\frac{18}{65} \\ B = -\frac{4}{13} \\ C = \frac{2}{13\sqrt{3}} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = -\frac{18}{65}e^{-x} - \frac{4}{13}e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{2}{13\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{130}\cos(2x) - \frac{4}{65}\sin(2x).$

② Lös $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^x} - y \ln x = 0, x > 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$

Lösning: Differentialkvationen är linjär av 1:a ordet.

Da $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$

är $e^{x \ln x - x} = \left(\frac{x}{e}\right)^x$ en integrerande faktor

Vi får

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot y(x) \right) = e^{-x}$$

och alltså

$$y(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x (-e^{-x} + C) = -\frac{1}{x^x} + C \left(\frac{e}{x}\right)^x.$$

Villkoret $y(e) = 1$ ger $1 = -\frac{1}{e} + C$

Svar: $y(x) = \frac{1}{x^x} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{e}\right) e^x - 1 \right)$

③ Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$

Lösning: En fall för Taylor. Vi gör utvecklingen

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}$$

och noterar standardutvecklingarna

$$\sin x = x + O(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t + O(t^2) \quad t \rightarrow 0$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \ln(\cos x) &= (x + O(x^3)) \cdot \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = \\ &= (x + O(x^3)) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = -\frac{1}{2}x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

Standardutvecklingen $e^t = 1 + t + O(t^2)$, $t \rightarrow 0$ ger

slutligen att

$$\frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \right) = \frac{1}{2} + o(x^2) \rightarrow \frac{1}{2}, x \rightarrow 0$$

Svar: $\frac{1}{2}$

- ④ Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar där
 $a_n = \frac{1}{n^2}$ om n inte är en jämn kvadrant och
 $a_n = \frac{1}{n}$ annars.

Lösning: Serien är en positiv serie och

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m^2}}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

alla m pos. heltal

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar (villkört) och
alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enligt kvadratsatsen
för positiva serier.

Svar: serien konvergerar

- ⑤ Avgör för vilken $x \in \mathbb{R}$ som serien $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)x^n$
är absolutkonvergent, betingad konvergent res divergent

Lösning: Omskrivningen $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n}$ ger med

standardutvecklingen $e^t = 1 + t + o(t^2)$, $t \rightarrow 0$ att

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} \ln n (1 + o(\frac{1}{n} \ln n)), \quad n \rightarrow \infty,$$

där vi observerat att $\frac{1}{n} \ln n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Detta ger att

$$\sqrt[n]{|n^{\frac{1}{n}} - 1|} = \underbrace{\left(\frac{1}{n} \ln n \right)^{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(1 + o\left(\frac{1}{n} \ln n \right) \right)^{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)x^n$ har konvergensradie

$R=1$ och är absolutkonvergent för $|x| < 1$ och

divergent för $|x| > 1$. Återstår att studera

fallen $x = \pm 1$.

Vi noterar att $\frac{1}{n} \ln n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ eftersom

$$\text{med } \ln(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ gäller } \ln(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \text{ för}$$

$x > e$. Då e^x är en strikt växande funktion för $x \in \mathbb{R}$

$$\text{gäller } n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$x=1: \text{ Då } n^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{\ln n}{n} (1 + o(\frac{\ln n}{n})) \text{ där } \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$, och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar gäller att

$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ divergerar enligt jämförelsekriteriet

$$x=-1: \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)(-1)^n \text{ konvergerar enligt Leibniz}$$

konvergenzkriterium eftersom $n^{\frac{1}{n}} - 1 \rightarrow 0$. Men

serien är inte absolutkonvergent då gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(n^{\frac{1}{n}} - 1)(-1)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) \text{ som var divergent}$$

enligt ovan

Svar: Serien är absolutkonvergent för $|x| < 1$, betingad konvergent för $x = -1$ och divergent för övrigt.

$$⑥ f_n(x) = \ln\left(\frac{nx}{n+1}\right), x > 0, n = 1, 2, \dots$$

$$g_n(x) = e^{f_n(x)}, x > 0, n = 1, 2, \dots$$

Avgör om f_n och/eller g_n är likformigt konvergent på $(0, \infty)$.

Lösning: För varje $x > 0$ gäller

$$f_n(x) \rightarrow \ln x, n \rightarrow \infty. \text{ Alltså}$$

$$f_n \rightarrow \ln x \text{ punktvis på } (0, \infty).$$

Det gäller även att

$$g_n(x) \rightarrow e^{\ln x} = x, n \rightarrow \infty \text{ alla } x > 0.$$

Alltså

$$g_n \rightarrow x \text{ punktvis på } (0, \infty).$$

Vidare gäller

$$|f_n(x) - \ln x| = \left| \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \right| = \left| \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{då} \quad \ln(1+x) \leq x \quad \text{alla } x > -1.$$

Alltså $\sup_{x \in (0, \infty)} |f_n(x) - \ln x| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ och
 $f_n \rightarrow \ln x$ likformigt på $(0, \infty)$.

Slutligen gäller

$$|g_n(x) - x| = \left| \frac{nx}{n+1} - x \right| = |x| \cdot \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = |x| \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Alltså gäller

$$|g_n(n+1) - (n+1)| = 1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

der $\sup_{x \in (0, \infty)} |g_n(x) - x| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$

$g_n \not\rightarrow x$ likformigt på $(0, \infty)$.

Svar: f_n konvergerar likformigt på $(0, \infty)$

g_n konvergerar inte likformigt på $(0, \infty)$

⑦ Se kurslitteraturen

⑧ Antag $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontraktion på $\mathbb{R}$. Visa att

1) f har en entydigt bestämt fixpunkt $\alpha \in \mathbb{R}$

2) För varje $x_0 \in \mathbb{R}$ gäller $x_n \rightarrow \alpha, n \rightarrow \infty$ där

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, \dots$$

Beweis: Enligt antagandet finns $c < 1$ sådant att

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq c|x - \tilde{x}| \quad \text{alla } x, \tilde{x} \in \mathbb{R}.$$

Speciellt följer att f är en kontinuerlig funktion

och

$$x \geq 0: x - f(x) = x - f(0) - f(x) + f(0) \geq x - f(0) - |f(x) - f(0)| \geq$$

$$\geq x - f(0) - c|x| \geq (1-c)x - f(0) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \infty$$

$$x \leq 0: x - f(x) = x - f(0) - f(x) + f(0) \leq x - f(0) + |f(x) - f(0)| \leq$$

$$\leq x - f(0) + c|x| = (1-c)x - f(0) \rightarrow -\infty, x \rightarrow -\infty.$$

Alltså finns $R > 0$ sådant att

$$R - f(R) > 0, -R - f(-R) < 0$$

och då $h(x) = x - f(x)$ är kontinuerlig finns $\alpha \in (-R, R)$

sådan att $h(\alpha) = 0$, dvs. $f(\alpha) = \alpha$, enligt
satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga
funktioner. Existensen är förstås visad.

Enthetligheten visar att

$$\alpha = f(\alpha), \tilde{\alpha} = f(\tilde{\alpha}), \text{ medför}$$

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\tilde{\alpha})| \leq c |\alpha - \tilde{\alpha}|, \text{ dvs } |\alpha - \tilde{\alpha}| = 0.$$

$$\text{Alltså } \alpha = \tilde{\alpha}.$$

1) är visad.

2) visar att

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \leq c |x_n - \alpha| \leq \dots \leq c^{n+1} |x_0 - \alpha|.$$

Här gäller $c^{n+1} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ då $c \in [0, 1)$.

2) visad.

