MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2017-08-17, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Malin Palö Forsström, ankn 5325
Besökstid: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = 2\sin(x)\cdot\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(x+y)^2}{2} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

3. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{n-1}\ (x + \frac{1}{n})^k$$

för $x \in (0,1)$.

(6p)

4. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x\ln x}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^{2n}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Antag att $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, är en växande divergent följd. Visa att

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$$

konvergerar.

(7p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

8. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna eller falska. Ge bevis respektive motexempel.

Påstående 1 Antag att $s_n(x)$, $I = [0, 1]$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$, är en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på I. Då måste (den punktvisa) gränsfunktionen vara kontinuerlig på I.

Påstående 2 Antag att $s_n(x)$, $I = [0, 1]$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$, är en följd av diskontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på I. Då måste (den punktvisa) gränsfunktionen vara diskontinuerlig på I.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till tentamen TMA976, den 17/8 2017

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = 2\sin x \cos 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Karakteristiska polynomet är $r^2+1 = (r+i)(r-i)$ vilket ger den allmänna homogenlösningen

$$y_h(x) = A\cos x + B\sin x$$

Omskrivning av $2\sin x \cos(2x)$ med additionsformlerna ger

$$2\sin x\cos(2x) = \sin(x+2x) + \sin(x-2x) = \sin 3x - \sin x.$$

En partikulärlösning ges av $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ där

$$y_{p_1}'' + y_{p_1} = \sin 3x \quad \text{och} \quad y_{p_2}'' + y_{p_2} = -\sin x$$

Ansätt $y_{p_1}(x) = C\cos(3x) + E\sin(3x)$. Derivering och insättning i diff.-ekv ger

$$(C-9C)\cos 3x + (E-9E)\sin 3x = \sin 3x$$

vilket med för $C=0$, $E = -\frac{1}{8}$.

För att beräkna $y_{p_2}(x)$ betraktas hjälpekvationen

$$\tilde{y}_{p_2}'' + \tilde{y}_{p_2} = -e^{ix}$$

Ansätt $\tilde{y}_{p_2}(x) = e^{ix}\cdot z(x)$. Förskjutningsregeln ger

$$e^{ix}(D+2i)D[z(x)] = -e^{ix}$$

dvs $z''(x) + 2iz'(x) = -1$. Sätt $z(x) = Fx$. Vi får $2iF = -1$

dvs $F = \frac{i}{2}$. Detta ger oss $y_{p_2}(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{i}{2}xe^{ix}\right) =$

$= \frac{x}{2}\cos x$. Den allmänna lösning till den ursprungliga diff.-ekv ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{8}\sin(3x) + \frac{x}{2}\cos x$$

Villkoren $y(0) = y'(0) = 0$ ger

$$A = 0, \quad B - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{dvs } A = 0,\ B = -\frac{1}{8}$$

Svar: $y(x) = -\frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{8}\sin 3x + \frac{x}{2}\cos x$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \frac{(x+y)^2}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Med variabelbytet $z(x) = x + y(x)$ får den separabla diff. ekv

$$z'(x) = 1 + \frac{1}{2} z^2(x)$$

Detta ger $\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^2} z'(x) = 1$ och vi får

$$\sqrt{2} \arctan\left(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}\right) = x + C$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $z(0) = 1$ och alltså

$$C = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Vi får $\arctan\left(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och speciellt

$$y(x) = -x + \sqrt{2} \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

för $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

Svar: $y(x) = -x + \sqrt{2} \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

3. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (x + \frac{1}{n})^k$ för $x \in (0,1)$

Lösning: Vi noterar att

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x+\tfrac{1}{n})^k = \frac{1-(x+\frac{1}{n})^n}{1-(x+\frac{1}{n})} = \frac{1-(x+\frac{1}{n})^n}{1-x+\frac{1}{n}}$$

vilket gäller för fixt $x \in (0,1)$ för n tillräckligt stort.

Vi noterar att $1 - x + \frac{1}{n} \to 1 - x$ då $n \to \infty$ och

$$1 - (x + \tfrac{1}{n})^n \to 1 \text{ då } n \to \infty \text{ för } x \in (0,1).$$

Svar: $\frac{1}{1-x}$.

4. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

Lösning: Vi noterar att $\frac{x^x-1}{x\ln x}$ endast är definierad för $x > 0$ så $\lim_{x\to 0} \ldots = \lim_{x\to 0+} \ldots$ Omskrivning av täljaren ger $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 = 1 + x\ln x + O((x\ln x)^2) - 1$ då $x \ln x \to 0$ då $x \to 0+$. Alltså

$$\frac{x^x - 1}{x \ln x} = 1 + O(x\ln x) \to 1, \text{ då } x \to 0+.$$

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{x\ln x} = 1$

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^{2n}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

Lösning: Sätt $t = x^2$ och betrakta potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} t^n$, i variabeln t.

Sätt $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$, $n=1,2,\dots$

Då $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$ får att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ är absolutkonvergent för $|t| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|t| > \frac{1}{e}$. Detta ger att $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^{2n}$ är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$. För $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\tfrac{1}{n})^{n^2} \cdot (\pm\tfrac{1}{\sqrt{e}})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})} \cdot e^{-n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})) - n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n})}.$$

Då $e^{-\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})} \not\to 0$ då $n\to\infty$ divergerar serien.

Svar: Potensserien är absolutkonvergent för $x \in (-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ och divergent för övrigt.

6. Antag att $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n > 1$, $n=1,2,\dots$ är en växande divergent följd. Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n} \quad \text{konvergerar.}$$

Lösning: Vi noterar att $a_1 > 1$ och $a_n \geq 0$ för $n=2,3,\dots$ och att $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2,3,\dots$ Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$ är en positiv serie så konvergensen är visad om man visar att följden av partialsummorna är uppåt begränsad.

För $N = 2,3,4,\dots$ gäller

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n} = \frac{a_1}{s_1 \ln^2 s_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n \ln^2 s_n} \leq$$
$$\leq \frac{a_1}{s_1 \ln^2 s_1} + \sum_{n=2}^{N} \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$$

då $\frac{1}{x\ln^2 x}$ är en positiv avtagande funktion

Då $\int_{s_1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx$ är en konvergent integral ($s_1 > 1$)

gäller $\int_{s_1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = C < \infty$ och alltså

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n} \leq \frac{a_1}{s_1 \ln^2 s_1} + C < \infty \quad \text{för alla } N = 1, 2, \ldots$$

Påståendet visat.

7. Se kurslitteraturen

8. Påstående 1 är sant. För bevis se kurslitteraturen.

Påstående 2 är falskt. Sätt t.ex.

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{n} & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Då gäller att $s_n \to s$ punktvis på $[0,1]$ där $s(x) = 0$, $x \in [0,1]$, s kontinuerlig funktion på $[0,1]$, ingen av $s_n(x)$ är kontinuerliga på $[0,1]$ och dessutom $s_n \to s$ likformigt på $[0,1]$ då

$$\sup_{x \in [0,1]} |s_n(x) - s(x)| = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$