

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2017-04-11,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin 3532

Besökstid: ca 10.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Betrakta differentialekvationen

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Givet att

$$y(x) = (A + Bx + C \cos x + D \sin x)e^x$$

löser motsvarande homogena differentialekvation för varje val av reella konstanter A, B, C och D , lös (för detta val av a) differentialekvationen

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

3. Bestäm det största heltal n för vilket

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x}{x^n}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i detta fall.

(6p)

4. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

(6p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right) x^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Antag att $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Antag vidare att talföljden

$$x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

konvergerar. Visa att också talföljden x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ måste konvergera¹.

(7p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

8. Antag att I är ett öppet intervall och att $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är en funktionsföljd av kontinuerligt deriverbara funktioner på I . Antag vidare att $s_n \rightarrow s$ punktvis på I och att $s'_n \rightarrow f$ likformigt på I . Visa att s är en kontinuerligt deriverbar funktion på I och att $s' = f$. Motivera väl!

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

¹Notera att villkoret $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ inte kan ersättas med $x_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Betrakta nämligen för $0 < a < 1$ följden

$$a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, \dots$$

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
Lösningförslag
2017-04-11

1. Betrakta differentialekvationen

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Givet att

$$y(x) = (A + Bx + C \cos x + D \sin x)e^x$$

löser motsvarande homogena differentialekvation för varje val av reella konstanter A, B, C och D , lös (för detta val av a) differentialekvationen

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

Lösning: Vi noterar att

$$y(x) = (A + Bx + C \cos x + D \sin x)e^x$$

är den allmänna homogenlösningen till en 4:e ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter vars karakteristiska ekvation har en dubbelrot 1 och (enkel)rötterna $1 \pm i$. Vi får av detta en karakteristisk ekvation

$$0 = (r - 1)^2 \cdot ((r - 1)^2 + 1) = \dots = r^4 - 4r^3 + 7r^2 - 6r + 2.$$

En jämförelse med den i problemet givna differentialekvationen ger att $a = 7$. Notera att om $a \neq 7$ måste

$$y(x) = (A + Bx + C \cos x + D \sin x)e^x$$

för varje val av A, B, C, D vara en lösning till $(a - 7)y'' = 0$ vilket är omöjligt, tag t ex $A = 1$ och $B = C = D = 0$.

För att bestämma en partikulärlösning till vårt problem där $a = 7$ ansätter vi $y_p(x) = be^{-x}$. Derivering och insättning i differentialekvationen ger $b = \frac{1}{20}$. Vi har nu fått

$$y(x) = (A + Bx + C \cos x + D \sin x)e^x + \frac{1}{20}e^{-x}$$

där A, B, C, D ska bestämmas så att de fyra villkoren i uppgiften blir uppfyllda. Vi får följande linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + C + \frac{1}{20} \\ 0 = y'(0) = A + B + C + D - \frac{1}{20} \\ 0 = y''(0) = A + 2B + 2D + \frac{1}{20} \\ 0 = y'''(0) = A + 3B - 2C + 2D - \frac{1}{20} \end{cases}$$

En liten kalkyl ger

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{5}, D = -\frac{2}{5}.$$

Detta ger oss

Svar: $y(x) = (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x)e^x + \frac{1}{20}e^{-x}$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

Lösning:

Löses med integrerande faktor $e^{-\frac{1}{2}x}$. Mycket lätt kalkyl ger

Svar: $y(x) = 3e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$

3. Bestäm det största heltal n för vilket

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x}{x^n}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i detta fall.

(6p)

Lösning:

Standardutvecklingarna

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$$

och

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$$

ger

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) + \mathcal{O}(x^6) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

Av detta följer att

$$1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x = \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

Detta medför att $n = 4$ och att gränsvärdet är $\frac{1}{12}$.

Svar: $n = 4$ och gränsvärdet = $\frac{1}{12}$

4. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

(6p)

Lösning: Standardutvecklingen

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}} x^2, \quad \theta = \theta(x) \in [0, 1]$$

ger

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{1}{2} \frac{k}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{n^4}\right)$$

och följdaktligen gäller

$$\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n k + n \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{4}.$$

Svar: $\frac{1}{4}$

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right) x^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

Lösning: Sätt

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi noterar att

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}, \quad n \rightarrow \infty$$

och att

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad n \rightarrow \infty$$

Av detta följer att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ är absolutkonvergent för $|x| < e$ och divergent för $|x| > e$ medan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$. Satsen om potensseriers konvergens ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$. Betrakta nu

$$(a_n + b_n)e^{-n} = \frac{n!}{(en)^n} + e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n}.$$

Stirlings formel, $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n)$, $\epsilon_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$, ger

$$\frac{n!}{(en)^n} = e^{-2n} \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Standardutvecklingen $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$ ger

$$e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n} = e^{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Följdaktligen har vi att

$$|(a_n + b_n)(\pm e^{-n})| \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

och potensserien divergerar för $x = \pm \frac{1}{e}$.

Svar: Absolutkonvergens för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergens för övrigt.

6. Antag att $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Antag vidare att talföljden

$$x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

konvergerar. Visa att också talföljden x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ måste konvergera¹.

¹Notera att villkoret $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ inte kan ersättas med $x_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Betrakta nämligen för $0 < a < 1$ följden

$$a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, \dots$$

(7p)

Lösning: Sätt

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

vilket existerar enligt antagandet. Då vidare $x_n \geq 1$ för alla n samt att varje konvergent talföljd är begränsad måste $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Av detta följer att

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ x_k : k \geq n \}$$

och

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{ x_k : k \geq n \}$$

existerar (som reella tal). Kalla dessa reella tal d respektive c . Vi har att

$$1 \leq c \leq d$$

och att om $c = d$ gäller att talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar (med gränsvärdet $c = d$). Vi argumenterar nu med ett motsägelsebevis. **Antag** därför att $c < d$ gäller. Enligt limsup- och liminfdefinitionerna finns delföljder $(\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ av $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = d$$

och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n = c.$$

Men eftersom

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

måste

$$c + \frac{1}{c} = d + \frac{1}{d} (= b).$$

Detta ger

$$\frac{1}{cd}(c^2d + d - d^2c - c) = 0,$$

dvs

$$(c - d)(cd - 1) = 0.$$

Vi har fått en motsägelse eftersom $1 < c < d$, och alltså följer att $c = d$.

Kommentar: Notera att det var i det sista steget som vi ”verkligt” utnyttjade att $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

Lösning: Se D på kurshemsidan.

8. Antag att I är ett öppet intervall och att $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är en funktionsföljd av kontinuerligt deriverbara funktioner på I . Antag vidare att $s_n \rightarrow s$ punktvis på I och att $s'_n \rightarrow f$ likformigt på I . Visa att s är en kontinuerligt deriverbar funktion på I och att $s' = f$. Motivera väl!

(7p)

Lösning: Vi observerar att $s'_n \in C(I)$ och $s'_n \rightarrow f$ likformigt på I medför att $f \in C(I)$. Fixera $a \in I$. Då existerar

$$\int_a^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Enligt satsen om gränsövergång under integraltecknet gäller för godtyckligt $x \in I$ att

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x s'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x) - s_n(a)) = s(x) - s(a).$$

Följdaktligen har vi

$$s(x) = s(a) + \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I$$

där funktionen i höger led är kontinuerligt deriverbar på I . Alltså är $s(x)$ deriverbar på I och påståendet i uppgiften följer då $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$.