

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2017-01-13,
TID(14.00-18.00)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin 3532

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x(e^x + 1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen¹

$$\begin{cases} y' = (2x + y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(6p)

3. Beräkna $f^{(6)}(0)$ för

$$f(x) = \sin(x^2) \cos(x) \ln(1 + x^2).$$

(6p)

4. För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin(\frac{1}{n}))^p?$$

(6p)

V.G.V.

¹Tips från coachen: Gör variabelbytet $z(x) = 2x + y(x)$.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x - 3)^{2n+1}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

6. Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i dessa fall.

(5p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsade talföljder.

(a) Visa att om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (dvs talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar) så gäller

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(b) Avgör om

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

gäller för alla begränsade talföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(3+4p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
Lösningsförslag
2017-01-13

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x(e^x + 1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

Lösning:

Differentialekvationen

$$(D^2 - 2D + 1)[y(x)] = x(e^x + 1)$$

är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter och inhomogen. Det karakteristiska polynomet är

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2.$$

Detta ger att den allmänna homogena lösningen kan skrivas på formen

$$y_h(x) = (A + Bx)e^x.$$

En partikulärlösning ges av

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x),$$

där $(D - 1)^2[y_{p,1}(x)] = xe^x$ och $(D - 1)^2[y_{p,2}(x)] = x$.

Ansättningen $y_{p,1}(x) = e^x v(x)$ ger med förskjutningsregeln att $D^2[v(x)] = x$ vilket med $v(x) = (a + bx)x^2 = ax^2 + bx^3$ efter insättning i differentialekvationen $v''(x) = x$ ger $a = 0$, $b = \frac{1}{6}$. Ansättningen $y_{p,2}(x) = c + dx$ ger $c = 2d = 1$. Vi får alltså

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 e^x + 2 + x.$$

Allmänna lösningen $y(x)$ till den ursprungliga differentialekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx + \frac{1}{6}x^3)e^x + 2 + x.$$

Begynnelsevillkoren bestämmer konstanterna A och B . Vi har

$$0 = y(0) = A + 2$$

och

$$0 = y'(0) = A + B + 1.$$

Detta ger $A = -2$ och $B = 1$.

Svar: $y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + x - 2)e^x + x + 2$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = (2x + y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(6p)

Lösning:

Efter variabelbytet $z(x) = 2x + y(x)$ fås den separabla differentialekvationen

$$z' = 2 + z^2.$$

Detta ges oss

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}\right) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

och härur

$$z(x) = \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x + \tilde{C}), \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Villkoret $y(0) = 0$ medför att $\tan \tilde{C} = 0$ och med $\tilde{C} = 0$ fås

$$\mathbf{Svar:} \quad y(x) = \sqrt{2} \tan(\sqrt{2}x) - 2x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$$

3. Beräkna $f^{(6)}(0)$ för

$$f(x) = \sin(x^2) \cos(x) \ln(1 + x^2).$$

(6p)

Lösning:

Standardutvecklingarna

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^5)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)$$

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$$

ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathcal{O}(x^{10})\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)\right) = \\ &= x^4 - x^6 + \mathcal{O}(x^8). \end{aligned}$$

Från entydighetssatsen för Taylorutvecklingar följer att

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -1$$

dvs $f^{(6)}(0) = -720$.

Svar: -720

4. För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin(\frac{1}{n}))^p?$$

(6p)

Lösning: Vi noterar att

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cos\left(\theta \frac{1}{n}\right)$$

och

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^5\right)$$

för $n = 1, 2, 3, \dots$ där $\theta = \theta(n) \in [0, 1]$. Följdaktligen är

$$1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

och serien $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin(\frac{1}{n}))^p$ är en positiv serie för varje $p \in \mathbb{R}$. Vidare gäller

$$\frac{(1 - n \sin(\frac{1}{n}))^p}{\frac{1}{n^{2p}}} = \frac{(\frac{1}{6n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4}))^p}{\frac{1}{n^{2p}}} \rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^p, \quad n \rightarrow \infty.$$

Då $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergerar om och endast om $\alpha > 1$ följer att serien i uppgiften konvergerar om och endast om $p > \frac{1}{2}$ enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

Svar: $p > \frac{1}{2}$

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x - 3)^{2n+1}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

Lösning: Vi noterar att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x - 3)^{2n+1} = (x - 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x - 3)^{2n}.$$

Sätt $t = (x - 3)^2$ och betrakta potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, där

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Då

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}, \quad n \rightarrow \infty$$

gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ är absolutkonvergent för $|t| < e$ och divergent för $|t| > e$. Följdaktligen är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-3)^{2n}$ absolutkonvergent för $|x-3| < \sqrt{e}$ och divergent för $|x-3| > \sqrt{e}$. För $x = 3 \pm \sqrt{e}$ får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n.$$

Sätt $b_n = \frac{n!}{n^n} e^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n), \quad \epsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ger

$$b_n = \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

Alltså divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$. Slutsatsen är att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-3)^{2n+1}$ är absolutkonvergent för $x \in (3 - \sqrt{e}, 3 + \sqrt{e})$ och divergerar för övrigt.

Svar: Absolutkonvergens för $x \in (3 - \sqrt{e}, 3 + \sqrt{e})$ och divergens för $x \in (-\infty, 3 - \sqrt{e}] \cup [3 + \sqrt{e}, \infty)$

6. Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i dessa fall.

(5p)

Lösning: Sätt $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}$. Funktionen $f(x, y)$ är definierad för $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y$ -axeln. För $x \neq 0$ gäller

$$f(x, y) = y \cdot \frac{\sin xy}{xy}.$$

Fixera godtyckligt $a \in \mathbb{R}$. Då

$$(x, y) \rightarrow (0, a)$$

gäller

$$xy \rightarrow 0.$$

(Observera att då $y \rightarrow a$ är y begränsad) Eftersom

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

gäller enligt gränsvärdesreglerna att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x} = a.$$

Svar: Gränsvärdet existerar för alla reella tal a och är lika med a

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

Lösning: Se D på kurshemsidan.

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsade talföljder.

(a) Visa att om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (dvs talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar) så gäller

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(b) Avgör om

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

gäller för alla begränsade talföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(3+4p)

Lösning: Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsade talföljder.

(a) Antag att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Sätt $c_n = a_n + b_n$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Då $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd gäller att $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathbb{R}$. Ska visa att

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$. Eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ finns N sådant att

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{alla } n \geq N.$$

Då gäller för $n \geq N$ att

$$a + \sup\{b_k : k \geq n\} - \epsilon < \sup\{c_k : k \geq n\} < a + \sup\{b_k : k \geq n\} + \epsilon.$$

Följdaktligen gäller då $n \rightarrow \infty$ att

$$a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n - \epsilon \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \leq a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n + \epsilon.$$

Då $\epsilon > 0$ godtyckligt följer

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(b) Likheten

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

gäller ej allmänt. Sätt t ex för positiva heltal n

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ udda heltal} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ udda heltal} \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$$

Då gäller

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

och

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1.$$