

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2015-04-16, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}. \quad (7p)$$

2. Bestäm den funktion $y(x)$ som satisfierar differentialekvationen

$$(x^3 - x)y' = y - y^3$$

och för vilken $y(1/2) = 1/2$. (6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{x^x} - 1}{x^{x^x - 1}}. \quad (6p)$$

4. För vilka reella tal x är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k,$$

där $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$, absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent? (6p)

5. För vilka $p > 1$ konvergerar talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med

$$x_n = \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \dots \sqrt[p]{1}}} \quad (n \text{ rötter}) \quad (6p)$$

6. Visa att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k (1-x)$$

konvergerar punktvis på intervallet $[0,1]$ men inte likformigt på $[0,1]$. Visa också att

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$$

konvergerar likformigt på intervallet $[0,1]$.

(5p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass M-sats.

(6p)

8. Antag att $a_k \downarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Visa att serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ båda konvergerar eller båda divergerar. Använd t ex detta för att visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \min(a_k, \frac{1}{k})$ divergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

① Lös $y'' + 2y' + 2y = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$

Lösning:

Differential ekvationen är linjär av 2:a ordet, med konstanta koefficienter.

Allmänna homogentlösningen $y_h(x)$:

Karakteristiska polynom: $r^2 - 2r + 2 = (r-1)^2 + 1 =$

$= (r-1+i)(r-1-i)$. Därför ges

$y_h(x) = Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \sin x$

En partikulärlösning $y_p(x)$: Ansätt $y(x) = z(x)e^{-x}$

Förstjärningsregeln ger $(D+i)(D-i)[z(x)] = x^2 + 2x + 3$,

det vill säga $z'' + z = x^2 + 2x + 3$. Ansätt $z(x) = ax^2 + bx + c$.

Derivering och insättning ger $a=1, b=2, c=1$

Alltså $y_p(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

Allmänna lösningen till $y'' + 2y' + 2y = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Svar: $y(x) = Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \sin x + (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

② Lös $(x^3 - x)y' = y - y^3$, $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Lösning:

Differential ekvationen är separabel och för $x \in (0,1)$

och $y \neq 0, \pm 1$ (som också är lösningar men

intressanta då de inte satisfierar $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$) gäller

$\frac{1}{y-y^3} y' = \frac{1}{x^3-x}$. Sätt $g(y) = \frac{1}{y-y^3}$ och

$f(x) = \frac{1}{x^3-x}$. Vi beräknar primitiva funktioner

$G(y)$ och $F(x)$ till $g(y)$ resp $f(x)$. Då

$\frac{1}{y-y^3} = -\frac{1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y+1}$

för vi $G(y) = \ln y - \frac{1}{2} \ln(1-y^2) = \ln \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

för $0 < y < 1$ (däröver $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$) och

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{för } x \in (0,1).$$

Detta ger oss

$$\ln\left(\frac{y(x)}{\sqrt{1-(y(x))^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \ln c, \quad c > 0$$

det

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1-(y(x))^2}} = c \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad y(x) > 0$$

Vid $x = \frac{1}{2}$ och $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ bestäms c , vi får $c = \frac{1}{3}$

Ättestår att lösa ut $y(x)$ som funktion av x

$$\text{vi får } y(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}, \quad x \in (0,1).$$

$$\text{Svar: } y(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}, \quad x \in (0,1).$$

③ Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{x^x} - 1}{x^{x^x} - 1}$

Lösning:

$$x^{x^x} = e^{x^x \ln x} = e^{e^{x \ln x} \ln x}$$

Da $x \ln x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow 0^+$ följer $x^{x^x} \rightarrow 0, x \rightarrow 0^+$

$$x^{x^x} - 1 = e^{(x^x - 1) \ln x} = e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}$$

Vi har nu

$$(e^{x \ln x} - 1) \ln x = (1 + x \ln x + O((x \ln x)^2) - 1) \ln x =$$

$$= x (\ln x)^2 + O(x^2 (\ln x)^3) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0^+$$

och alltså blir det slutna gränsvärdet -1 .

$$\text{Svar: } -1$$

④ $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$

Bestäm konvergens för potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

Lösning:

vi börjar med att uppskatta a_k . Med hjälp

enligt beviset av integralkriteriet för

$$\int_1^k \frac{dx}{x} \leq a_k \leq 1 + \int_1^k \frac{dx}{x} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{det } \ln k \leq a_k \leq 1 + \ln k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Instabilitetsproblemet för gränsvärden ger oss

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = 1.$$

Potensserien har alltså konvergensradie $R = \frac{1}{1} = 1$

och är absolutkonvergent för $|x| < 1$ och divergent

för $|x| > 1$. För $x = \pm 1$ gäller att potensserien

div konvergerar då $a_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Sov: Potensserien är absolutkonv. för $|x| < 1$ och divergent för övrigt

⑤ $x_n = \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \dots + \sqrt[p]{1}}}$ (n rötter) $n = 1, 2, \dots$

Avge för vilken $p > 1$ som talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar.

Lösning: Vi noterar att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande talföljd. Talföljden konvergerar då om

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad. Det gäller

$$1 \leq x_n = \sqrt[p]{1 + x_{n-1}} \leq \sqrt[p]{1 + x_n} \leq \sqrt[p]{2x_n} \quad n = 2, 3, \dots$$

Detta ger $x_n^{1-\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \quad n = 1, 2, \dots$ dvs

$$x_n \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Alltså: Talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar för alla $p > 1$

Att: Resultatet kan också fås via fixpunktsmetoden

Sätt $f(x) = \sqrt[p]{1+x}$, $x \geq 1$. Vi observerar att

$$f'(x) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1+x)^{1-\frac{1}{p}}}, \quad x \geq 1 \quad \text{och alltså} \quad \sup_{x \geq 1} |f'(x)| \leq \frac{1}{p} < 1$$

då $p > 1$. Vidare gäller

$$f: [1, R] \rightarrow [1, R] \quad \text{om} \quad \sqrt[p]{1+R} \leq R.$$

Om $R = \sqrt[p]{1+R} \rightarrow \infty, R \rightarrow \infty$ gäller självklart att

det finns dylikt R . Fixer detta. Fixpunktsmetoden

ger oss att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ där $x_1 = 1$ och

$x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, konvergerar mot den

entydigt bestämda fixpunkten till f i $[1, R]$.

⑥ 1) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)$ konvergerar punktvis men inte
 likformigt på $[0,1]$

2) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k(1-x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

Lösning:

1) Sätt $f_k(x) = x^k(1-x)$, $x \in [0,1]$ och $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$,
 $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \dots$

Vi noterar att $f_k(1) = 0$ $k = 1, 2, \dots$ och alltså

$s_n(1) = 0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. För $x \in [0,1)$ gäller

$$s_n(x) = (1-x) \sum_{k=1}^n x^k = (1-x) \frac{x-x^{n+1}}{1-x} = x-x^{n+1} \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

Sätt

$$s(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Det gäller att $s_n \rightarrow s$ punktvis på $[0,1]$ och alltså
 konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ punktvis på $[0,1]$.

Vidare noterar vi att $s_n \rightarrow s$ likformigt på $[0,1]$

eftersom $s_n \in C([0,1])$ $n = 1, 2, \dots$ men $s \notin C([0,1])$.

Alltså konvergerar inte $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ likformigt på $[0,1]$

2) Sätt $f_k(x) = (-1)^k x^k(1-x)$, $x \in [0,1]$ och $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$
 $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \dots$

Här gäller $s_n(1) = 0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ och för $x \in [0,1)$

$$s_n(x) = (1-x) \sum_{k=1}^n (-x)^k = (1-x) \frac{-x - (-x)^{n+1}}{1+x} \rightarrow x \frac{x-1}{1+x}, n \rightarrow \infty$$

Sätt $s(x) = x \frac{x-1}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Det gäller alltså

$s_n \rightarrow s$ punktvis på $[0,1]$, dvs $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar
 punktvis på $[0,1]$ med den (punktvisa) gränsv funktionen
 $x \frac{x-1}{1+x}$. För att visa att konvergensten är

likformig på $[0,1]$ betraktar

$$|s_n(x) - s(x)| = \frac{1-x}{1+x} x^{n+1}, x \in [0,1].$$

Vi önskar visa att $\sup_{x \in [0,1]} |s_n(x) - s(x)| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

Sätt $h(x) = \frac{1-x}{1+x} x^{n+1}$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} \left[((m+1)x^m - (m+2)x^{m+1})(1+x) - (x^{m+1} - x^{m+2}) \right] = \\
 &= \frac{1}{(1+x)^2} x^m \left[(m+1) + (m+1 - (m+2) - 1)x - (m+1)x^2 \right] = \\
 &= -\frac{(m+1)}{(1+x)^2} x^m \left[x^2 + \frac{2}{m+1}x - 1 \right]
 \end{aligned}$$

För $x \in [0, 1]$ gäller $h'(\tilde{x}) = 0$, $h'(x) > 0$, $x \in [0, \tilde{x})$

och $h'(x) < 0$, $x \in (\tilde{x}, 1]$ där $\tilde{x} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2} - \frac{1}{m+1} =$

$= 1 - \frac{1}{m+1} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$, $m \rightarrow \infty$. Vi har nu

$$\sup_{x \in [0, 1]} |s_m(x) - s(x)| = h(\tilde{x}) = \frac{\frac{1}{m+1} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{m}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{m+1} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^{m+1}$$

Vi får $h(\tilde{x}) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$ och påståendet visat. \square

⑦ Se kursbok

⑧ Antag $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ avtagande följd med $a_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$

1) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ både konvergerar

eller både divergerar

2) Visa $\sum_{k=1}^{\infty} \min(a_k, \frac{1}{k})$ divergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar

Lösning

1) Det gäller för $k=1, 2, \dots$

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq \underbrace{a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \dots + a_{2^{k+2}-1}}_{2^k \text{ termer}} \leq 2^k a_{2^k}$$

Alltså

$$\sum_{k=1}^m 2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{l=2}^{2^{m+1}-1} a_l \leq \sum_{k=1}^m 2^k a_{2^k} \quad m=1, 2, \dots$$

Detta ger att $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ konvergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergerar

enligt kriteriet för positiva serier. Vidare gäller

$$\text{Om } \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \leq 2 \sum_{l=2}^{2^{m+1}-1} a_l \text{ att } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergerar}$$

om $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ konvergerar

2) Sätt $b_k = \min(a_k, \frac{1}{k})$, $k=1, 2, \dots$. Då gäller

att $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd med $b_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$

eftersom $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ avtagande

Då gäller $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k b_{2^k}$ divergerar

Enligt antagandet divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Vi observerar att

$$2^k b_{2^k} = 2^k \min(a_{2^k}, \frac{1}{2^k}) = \min(2^k a_{2^k}, 1)$$

Om $2^k b_{2^k} = 1$ för ändligt många k divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k b_{2^k}$. Om $2^k b_{2^k} = 1$ för högst ändligt många k gäller $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k b_{2^k}$ divergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ divergerar. Men $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ divergerar då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

Påståendet följer \square