

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2014-08-21,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Christoffer Standar, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och
motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y''' + 4y'' + 5y' = x(1 + e^{-x}).$$

(8p)

2. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{\ln x}$$

då funktionen $y(x)$ satisfierar

$$(x^2 + x)y' + y - x = 1.$$

(8p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\ln(1 + e^x) - x).$$

(7p)

4. För vilka reella tal x är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2+2}} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

5. För vilka reella tal a konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \cdot n \ln n} ?$$

(8p)

6. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{1+x^2} dx.$$

(6p)

7. Antag att

(a) $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ samt att

(b) f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstanten $k < 1$, dvs

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{alla } x, y \in [-1, 1].$$

Visa att

(a) det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in [-1, 1]$ sådant att

$$f(\alpha) = \alpha,$$

(b) för varje $x_0 \in [-1, 1]$ gäller att följderna $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$,
 $n = 0, 1, 2, \dots$ konvergerar mot fixpunkten α för f , samt att

(c)

$$\begin{cases} |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \\ |x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}| \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(8p)

8. Antag att $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ är en avtagande följd med $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Antag att $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ är en följd av reella tal (kan ha olika tecken) och att det finns ett reellt tal M sådant att

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| < M$$

för $n = 1, 2, \dots$. Visa¹ att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k$$

konvergerar.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

¹Tips: Sätt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n = 1, 2, \dots$, och notera att

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \dots = s_1(\alpha_1 - \alpha_2) + \dots + s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + s_n \alpha_n.$$

1. Löse $y''' + 4y'' + 5y' = x(1 + e^{-x})$

Lösung: Kar. pol. $r^3 + 4r^2 + 5r = r((r+2)^2 + 1) = (r-0)(r+2+i)(r+2-i)$ zur homogenen Lösung

$y_h(x) = A + B e^{-2x} \cos x + C e^{-2x} \sin x$

Ansatz $y_p(x) = ax^2 + bx + c(x)e^{-x}$ für

$4 \cdot 2a + 5 \cdot (2ax + b) = x$ d.h. $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{4}{25}$

$((D-1)^3 + 4(D-1)^2 + 5(D-1))[c(x)] = x$

d.h. $(D^3 + D^2 - 2)[c(x)] = x$, d.h. $c(x) = -\frac{1}{2}x$

Antwort: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + B e^{-2x} \cos x + C e^{-2x} \sin x + \frac{x^2}{10} - \frac{4x}{25} - \frac{1}{2}x e^{-x}$

2. Bestimme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$ da $(x^2+x)y' + y - x = 1$

Lösung: Für $x \neq 0, -1$ gilt

$y' + \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{1}{x}$ (*)

Integrierende Faktor: $\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} dx = A \ln|x| + B \ln|x+1|$ mit $A=1, B=-1$.

zur int. f. f. $e^{\ln|\frac{x}{x+1}|} = \left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{x}{x+1}$ für $x > 0$

Multipliziere (*) mit $\frac{x}{x+1}$. für

$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} y(x) \right) = \frac{1}{x+1}$

d.h. $y(x) = \frac{x+1}{x} (\ln|x+1| + C)$ $C \in \mathbb{R}$

Dabei gilt $\frac{y(x)}{\ln x} \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$

Antwort: 1

3. Bestimme $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\ln(1+e^x) - x)$

Lösung: $e^x (\ln(1+e^x) - x) = e^x (\ln e^x + \ln(1+e^{-x}) - x) =$

$= e^x \cdot \ln(1+e^{-x}) = \{ \ln(1+t) = t + O(t^2), t \rightarrow 0 \} =$

$= e^x \cdot (e^{-x} + O((e^{-x})^2)) = 1 + O(e^{-x}) \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$

Antwort: 1

4. Bestäm konvergensraden för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k^2+2}} x^k$

Lösning: Sätt $a_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k^2+2}}$ $k=1, 2, \dots$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e, k \rightarrow \infty$$

Då är konvergensraden $R = \frac{1}{e}$.

Polserien är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och

divergent för $|x| > \frac{1}{e}$.

$$x = \frac{1}{e}: a_k \left(\frac{1}{e}\right)^k = e^{-k + k^2 \ln(k+1) - (k^2+2) \ln k}$$

$$\begin{aligned} \text{Vi har } & -k + k^2 \ln(k+1) - (k^2+2) \ln k = \\ & = -k + (k^2 - (k^2+2)) \ln k + k^2 \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \\ & = -k - 2 \ln k + k^2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) = \\ & = -2 \ln k - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

$$\text{vilket ger } a_k \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot e^{O\left(\frac{1}{k}\right)}, k \rightarrow \infty$$

Då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar följer att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{e}\right)^k$ konvergerar

$x = -\frac{1}{e}: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{1}{e}\right)^k$ absolutkonvergent enligt $x = \frac{1}{e}$ -fallet

Svar: absolutkonvergent för $|x| \leq \frac{1}{e}$, divergerar för övrigt

5. Bestäm de $a \in \mathbb{R}$ för vilka $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}}$ konvergerar

Lösning: Då $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ divergerar följer att serien ovan inte kan konvergera för $a > 1$. Antag $a \leq 1$. Då

$f(x) = \frac{1}{x^a}$ avtagande funktion på $[1, \infty)$ för uppskattningen

$$\int_1^m \frac{1}{x^a} dx \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^a} \leq \int_1^m \frac{1}{x^a} dx + 1, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Då } \int_1^m \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} [\ln x]_1^m = \ln m & a=1 \\ \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_1^m = \frac{1}{1-a} (m^{1-a} - 1) & a < 1 \end{cases}$$

följer att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}}$ konvergerar om $a \leq 1$

då $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$ konvergerar om $p > 1$ och

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerar om $p > 1$

Svar: $a \leq 1$

6. Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{1+x^2} dx$

Lösning: Partialintegration ger

$$\int_0^{\infty} \frac{m \sin mx}{1+x^2} dx = \left[-\frac{\cos mx}{1+x^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \cos(mx) \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= 1 - \left\{ \left[\frac{\sin(mx)}{m} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\sin(mx)}{m} \cdot \left(\frac{2}{(1+x^2)^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2x \cdot \frac{2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} \right) dx \right\} = 1 + \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \sin(mx) \cdot \frac{2-5x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Här gäller $\int_0^{\infty} \left| \sin(mx) \frac{2-5x^2}{(1+x^2)^3} \right| dx \leq \int_0^{\infty} \frac{5(1+x^2)}{(1+x^2)^3} dx \leq$

$$\leq 5 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{5\pi}{2} < \infty$$

Låt $m \rightarrow \infty$, vi får $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{m \sin(mx)}{1+x^2} dx = 1$.

Svar: 1

7. Se dina föreläsninganteckningar

8. Antag $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ arytymisk talföljd med $\alpha_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ och $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ följd av full siddoma ak

$$|a_1 + \dots + a_n| < M \text{ för alla } n=1, 2, \dots \text{ för något } M \in \mathbb{R}$$

Visa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k$ konvergerar

Lösning: Enligt givet tips, sätt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n=1, 2, \dots$. Det gäller

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 (s_2 - s_1) + \dots + \alpha_n (s_n - s_{n-1}) =$$

$$= s_1 (\alpha_1 - \alpha_2) + s_2 (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + s_{n-1} (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + s_n \alpha_n$$

Här gäller $|s_n \alpha_n| < M \cdot \alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ och

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} \geq 0 \text{ för } k=1, 2, \dots, n-1.$$

Vi noterar att det räcker att visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} |s_k (\alpha_k - \alpha_{k+1})| \text{ konvergerar}$$

för att $\sum_{k=1}^{\infty} s_k (\alpha_k - \alpha_{k+1})$ ska konvergera

$$\text{Men } \sum_{k=1}^n |s_k (\alpha_k - \alpha_{k+1})| \leq M (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + \alpha_n - \alpha_{n+1}) =$$

$$= M (\alpha_1 - \alpha_{n+1}) \leq M \alpha_1 \text{ för alla } n. \text{ Alltså}$$

konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k (\alpha_k - \alpha_{k+1})|$ enligt huvudsatsen för positiva serier av nollbelagd följd.