

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2014-04-22, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Emil Gustavsson, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$x(1-x)y' - y = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (0, 1).$$

Visa att varje lösning har exakt ett minimum i $(0, 1)$.

(7p)

2. Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz}{2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy}$$

existerar.

(7p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$$

för $a > 0$.

(7p)

4. För vilka reella tal x är serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k^2}{2^k k!} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent samt beräkna seriens summa för de x för vilka serien konvergerar.

(7p)

5. (a) Avgör om följderna $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}} + \dots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

är konvergent, och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

(4p)

- (b) Betrakta

$$f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, \quad x \in [0, 2], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Visa att funktionsföljden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0, 2]$.

(4p)

6. Avgör om serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} \cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right)$$

konvergerar.

(8p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

8. Låt I vara ett intervall och antag att $a_n(x) > 0$ för $x \in I$ och $n = 1, 2, 3, \dots$ samt att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konvergerar likformigt på I . Visa att om $|b_n(x)| \leq a_n(x)$ för $x \in I$ och $n = 1, 2, 3, \dots$ så konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ likformigt på I .

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

- ① Lös $x(1-x)y' - y = \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, samt visa att varje lösning har exakt ett minimum i $(0,1)$.

Lösning: Omskrivning av diff-ek

$$(*) \quad y' + \frac{1}{x(x-1)} y = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (0,1).$$

D. ek. är en första ordens diff-ek lösas m. h. g. a. integrerande faktorer. Sätt $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$. Multiplicera (*) med $e^{G(x)}$ där $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$.

$$G(x) = \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln \left(\frac{1-x}{x} \right), \quad x \in (0,1)$$

Vi får $\frac{d}{dx} \left(\frac{1-x}{x} y(x) \right) = \frac{1}{x(1-x)}$ och alltså

$$y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) + C \right), \quad x \in (0,1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Fixera $C \in \mathbb{R}$. ska visa att $y(x)$ har exakt ett min

i $(0,1)$. Dä $\frac{x}{1-x}$ strängt växande på $(0,1)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$

och $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \infty$ kan vi sätta $z = \frac{x}{1-x}$ och vi

och $h(z) = z(\ln z + C)$ har exakt ett min

för $z \in (0, \infty)$. Vi noterar att $h'(z) = \ln z + C + 1$

och $h''(z) = \frac{1}{z} > 0$ för $z \in (0, \infty)$. Alltså har $h(z)$

exakt ett min för $z \in (0, \infty)$

Svar: $y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) + C \right), \quad C \in \mathbb{R}$

- ② Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz}{2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy}$$

existerar

Lösning: Sätt $f(x,y,z) = \frac{x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz}{2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy}$

Vi noterar att $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + (y-z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + (x-y)^2}$

och alltså $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Vidare

$f(t,0,0) = \frac{1}{2}$ för $t \neq 0$ och

$f(t,t,t) = 1$ för $t \neq 0$ vilket ger

att gränsvärdet inte existerar.

Svar ~~✓~~

③ Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ för $a > 0$.

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} (a+x)^x - a^x &= a^x \left(\left(1 + \frac{x}{a}\right)^x - 1 \right) = a^x \left(e^{x \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)} - 1 \right) = \\ &= \left\{ \ln(1+t) = t + O(t^2), t \rightarrow 0 \right\} = \\ &= a^x \left(e^{\frac{x^2}{a} + O(x^3)} - 1 \right) = \left\{ e^t = 1 + t + O(t^2), t \rightarrow 0 \right\} = \\ &= a^x \left(\frac{x^2}{a} + O(x^3) \right). \end{aligned}$$

Då gäller

$$\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = a^x \left(\frac{1}{a} + O(x) \right) = e^{x \ln a} \left(\frac{1}{a} + O(x) \right) \rightarrow \frac{1}{a}, x \rightarrow 0.$$

Svar: $\frac{1}{a}$

④ Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k^2}{2^k \cdot k!} x^k$ är absolut konvergent / betingad konvergent / divergent samt beräkna seriens summa.

Lösning: Sätt $a_k = \frac{1+k^2}{2^k \cdot k!}$ $k=0, 1, \dots$

$$\text{Det gäller att } \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1+(k+1)^2}{1+k^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot (k+1)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

Krootkriteriet för potensserie ger att konvergensraden

$R = \infty$ och potensserie är absolut konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$.

För att beräkna seriens summa kan vi göra

$$\text{omskrivningen } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k^2}{2^k \cdot k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

Sätt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k$, $x \in \mathbb{R}$. Vi noterar att

$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ och att vi kan derivera termvis för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi får $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$ och $x f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k$

Den senare potensserie har samma konvergensradie och

de ursprungliga och kan alltså deriveras termvis. Vi får

$$(x f'(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{och följande} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k &= x(x f'(x))' = \dots = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Svar: Serien är absolut konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$ med

$$\text{summan } e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right)$$

⑤ a) Avgör om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar då

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}} + \dots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}, \quad n=1, 2, \dots$$

Lösning: Vi observerar att

$$n \cdot \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} \leq a_n \leq n \cdot \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} \quad n=1, 2, \dots$$

samt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = 1$$

Insättningsregeln ger $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existerar och $= 1$

b) $S = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}$, $x \in [0, 2]$, $n = 1, 2, \dots$

Vise att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis på $[0, 2]$ men inte likformigt på $[0, 2]$

Lösning: $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ och

$f_n(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ för $x \in (0, 2]$ eftersom

$$\frac{y}{e^y} \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow \infty$$

$f_n \rightarrow 0$ punktvis på $[0, 2]$.

Återstår att visa att $f_n \not\rightarrow 0$ likf på $[0, 2]$,

dvs, ska visa att $\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - 0| \not\rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

Notera att

$$f'_n(x) = \frac{1}{e^{nx}} [n - n^2 x] = 0 \text{ när } x = \frac{1}{n}$$

$$\text{och } \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - 0| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Alltså gäller $f_n \not\rightarrow 0$ likf på $[0, 2]$

Svar: a) följer att a_n konvergerar mot 1, b) —

⑥ Avgör om $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2} \cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right)$ konvergerar

Lösning: Vi observerar att

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) &= \cos\left(\pi \frac{k^2+k-(k+1)+1}{k+1}\right) = \cos\left((k-1)\pi + \frac{\pi}{k+1}\right) = \\ &= (-1)^{k-1} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right). \end{aligned}$$

Vidare gäller $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \cos(\theta t)$ där $\theta \in [0, 1]$

Här gäller

$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2}$ konvergerar enligt Leibniz kriteriet.

da $a_k = \frac{1}{(\ln k)^2} \downarrow 0, k \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{k+1} \right)^2 \cos\left(\theta_k \cdot \frac{\pi}{k+1}\right) \right| \leq$$

$\leq \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 (\ln k)^2}$ konvergerar enligt jämförelsekriteriet

(jämför med t.ex. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$).

Da konvergerar också $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{k+1} \right)^2 \cos\left(\theta_k \cdot \frac{\pi}{k+1}\right)$

och $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$ konvergerar li serien

är summan av två konvergenta serier.

(7) (8) se textboken

(8) är en variant av Weierstrass M-kriteriet.