

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2013-12-18,
TID(14.00-18.00)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin, 3532

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y'' + 4y = (1 + \sin x)^2. \quad (8p)$$

2. Funktionen $y(x)$ uppfyller differentialekvationen

$$y' - ay = b, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 3,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$. Bestäm $y(3)$. (6p)

3. (a) Taylorutveckla

$$\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-1}$$

med restterm på formen $\mathcal{O}(x^8)$. (3p)

- (b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - \left(\frac{1}{a}\right)^x}{x}$$

för $a > 0$. (5p)

4. (a) För vilka reella tal x är serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k k^{1+\frac{1}{k}} \ln k} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent? (6p)

- (b) Beräkna

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! 3^k}.$$

(6p)

5. Avgör om följderna $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där $a_1 = 2$ och

$$a_{n+1} = \frac{3}{2 + a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

är konvergent, och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

(6p)

6. Visa att funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + k^2}$$

är punktvis konvergent på $[0, \infty)$ och likformigt konvergent på $[0, R]$ för varje $R > 0$. Avgör om funktionsserien är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel med resttermen på Lagranges form.

(8p)

8. Formulera rotkriteriet för positiva serier. Visa att påståendet i satsen också gäller om $\lim_{k \rightarrow \infty}$ ersätts med $\limsup_{k \rightarrow \infty}$.

(5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

① Lös $y'' + 4y = (1 + \sin x)^2$

Lösning: Kar ekv $r^2 + 4 = 0$ ges $r_{1,2} = \pm 2i$ och

$$y_h(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

Da $(1 + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x = \frac{3}{2} + 2 \sin x - \frac{1}{2} \cos(2x)$

ansätts $y_{p,1}(x) = a + b \cos x + c \sin x$ och $y_{p,2}(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i2x} u(x)}{u(x)} \right)$

där $u'' + 4u = -\frac{1}{2} e^{i2x}$. Vi får då $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$

$y_{p,1}$: Derivering och insättning i $y'' + 4y = \frac{3}{2} + 2 \sin x$

ges $(4b - b) \cos x + (4c - c) \sin x + 4a = \frac{3}{2} + 2 \sin x$

dvs $a = \frac{3}{8}$, $b = 0$, $c = \frac{2}{3}$. Alltså får

$$y_{p,1}(x) = \frac{2}{3} \sin x + \frac{3}{8}$$

$y_{p,2}$: Fristyrningsregla ges $-\frac{1}{2} e^{i2x} = (D^2 + 4) [e^{i2x} z(x)] =$

$$= e^{i2x} (D + 2i)^2 + 4 [z(x)] = e^{i2x} (D^2 + 4iD) [z(x)]$$

där $z'' + 4iz' = -\frac{1}{2}$. Ansatsen $z(x) = dx$ ges $d = \frac{2}{8}$ och

alltså $y_{p,2}(x) = \operatorname{Re} \left(e^{i2x} \cdot \frac{1}{8} x \right) = -\frac{x}{8} \sin(2x)$

Svar: $y(x) = A \cos(2x) + (B - \frac{x}{8}) \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin x + \frac{3}{8}$

② Bestäm $y(x)$ då $y' - ay = b$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 3$ där a, b reella konstanter

Lösning: Med den integrerande faktorn e^{-ax} får

$$(*) \frac{d}{dx} (y(x) \cdot e^{-ax}) = b e^{-ax}. \text{ Om } a = 0 \text{ får } y(x) = bx + c$$

vilket innebär att $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ och $y(2) = 3$ och

alltså är $a \neq 0$. Integration $\leadsto (*)$ ges

$$y(x) = e^{ax} \left(-\frac{b}{a} e^{-ax} + c \right) = c e^{ax} - \frac{b}{a}. \text{ Villkoret}$$

$$y(0) = 0 \text{ ger } c = \frac{b}{a} \text{ och villkoren } y(1) = 1, y(2) = 3 \text{ ger}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} (e^a - 1) = 1 & \dots (1) \\ \frac{b}{a} (e^{2a} - 1) = 3 & \dots (2) \end{cases}$$

Vi får $(e^{2a} - 1) = 3(e^a - 1)$ dvs $(e^a)^2 - 3e^a + 2 = 0$

och alltså $e^a = 2$ eller 1 men 1 möjligt då $a \neq 0$.

Alltså $e^a = 2$ och $b = a$. Vi får $y(3) = (e^a)^3 - 1 = 7$
Svar: 7

③ a) Taylorutveckling $(1 + \frac{x^2}{2})^{-1}$ med restterm $O(x^8)$

Lösning: Standardutvecklingen $(1+t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2} t^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6} t^3 + O(t^4)$, $t \rightarrow 0$ ger

$$(1 + \frac{x^2}{2})^{-1} = 1 + (-1)\frac{x^2}{2} + \frac{(-1)(-2)}{2} (\frac{x^2}{2})^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6} (\frac{x^2}{2})^3 + O(x^8) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} + O(x^8)$$

Svar: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} + O(x^8)$ (jfr. geometrisk serie)

b) $a > 0$. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - (\frac{1}{a})^x}{x}$

Lösning: För $b > 0$ gäller $b^x = e^{x \ln b} = \{e = 1 + t + O(t^2), t \rightarrow 0\} =$
 $= 1 + x \ln b + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$

$$\text{Alltså: } \frac{a^x - (\frac{1}{a})^x}{x} = \frac{1}{x} (1 + x \ln a - (1 + x \ln \frac{1}{a}) + O(x^2)) =$$

$$= \ln a - \ln(\frac{1}{a}) + O(x) = 2 \ln a + O(x) \rightarrow 2 \ln a, x \rightarrow 0$$

Svar: $2 \ln a$

④ Avgör konvergens för potensserien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}} \ln k} x^k$
 för olika x .

Lösning: Sätt $a_k = \frac{1}{2^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}} \ln k}$ $k = 2, 3, \dots$

Vi noterar att

$$(2^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}} \ln k)^{\frac{1}{k}} = 2 \cdot (e^{(1+\frac{1}{k}) \ln k} \cdot \ln k)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= 2 \cdot e^{(1+\frac{1}{k}) \frac{\ln k}{k}} \cdot e^{\frac{\ln(\ln k)}{k}} \rightarrow 2, k \rightarrow \infty.$$

Alltså gäller $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow \frac{1}{2}$, $k \rightarrow \infty$ och

konvergensradie R för potensserien $= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Det gäller att potensserien divergerar för $|x| > 2$ och är
 absolut konvergent för $|x| < 2$.

$$x=2: \sum_{k=2}^{\infty} a_k 2^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}} \ln k}$$

Vi noterar att $k^{1+\frac{1}{k}} \ln k = k \cdot e^{\frac{\ln k}{k}} \cdot \ln k$

Serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ divergerar och $\frac{a_k}{\frac{1}{k \ln k}} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$

Alltså divergerar potensserien för $x=2$ enligt jämförelse-
kriteriet på gränsvärdets form.

$x=-2$: Beträkt $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! k \cdot e^{\frac{2k}{k}}}$
Vi har $\frac{1}{k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$

Sätt $h(x) = x \ln x \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$. Vi ser att $h(x)$ växer
snabbt för $x > M$ för $M > 0$ tillräckligt stort så
 $h'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \left[\ln x + 1 + x \ln x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right] =$
 $= e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\ln x + 1 + \frac{\ln x}{x} (1 - \ln x) \right) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
 $= e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \ln x \cdot \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1 - \ln x}{x} \right) > 0$ för $x > M$ något
 $x > 1$ $\rightarrow 1, x \rightarrow \infty$

$M > 0$. Alltså b_k växer monoton mot 0 för $k > M$.

Leibniz kriteriet ger att $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k b_k$ konvergerar.

Svar: absolutkonvergent för $x \in (-2, 2)$, betingad
konvergent för $x = -2$, divergent för $x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$

b) Beträkt $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! 3^k}$

Lösning: Vi har $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! 3^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} =$
 $= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big|_{x=\frac{1}{3}} =$
 $= \frac{1}{3} \cdot (e^x - 1 - x) \Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{9}$ eftersom $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Svar: $\frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{9}$

⑤ $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{3}{2+a_n}$ $n=1, 2, \dots$. Ärja konvergent
och betrakta er gränsvärde

Lösning: Sätt $f(x) = \frac{3}{2+x}$ för $x \in I = [0, 2]$ t.ex.

Det gäller $f: I \rightarrow I$ oavsett om då $f(x) = -\frac{3}{(2+x)^2}$
och alltså $\max_{x \in I} |f'(x)| = \frac{3}{4} < 1$ är f en kontraktion.

Fixpunktsatsen ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot
den entydigt bestämda fixpunkten $a \in I$ där $a = \frac{3}{2+a}$
dvs $a=1$.

Svar: konvergerar, gränsvärde = 1.

⑥ Funktionsserie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$. Visa

i) punktvis konvergens för $x \in [0, \infty)$

ii) likformig konvergens för $x \in [0, R]$ för varje $R > 0$

iii) undvika likformig konvergens för $x \in [0, \infty)$

Lösning: i) Fixera $x \in [0, \infty)$. Då gäller

$0 \leq \frac{x}{x^2+k^2} \leq x \cdot \frac{1}{k^2}$ och då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar

så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$ enligt jämförelsekrit

ii) Fixera $R > 0$. Då $0 \leq \frac{x}{x^2+k^2} \leq R \cdot \frac{1}{k^2}$, $x \in [0, R]$, och

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R}{k^2}$ konvergerar följer att funktionsserien

är likformigt konvergent på $[0, R]$ enligt Weierstrass

M-sats

iii) Låt $s(x)$ beteckna den punktvisa gränsvärdet för $x \in [0, \infty)$

som vi vet existerar från i). Notera också att det är

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{x}{x^2+k^2} \Big|_{x=m} \geq m \cdot \frac{m}{(2m)^2 + (2m)^2} = \frac{1}{8} \quad \text{för } m=1, 2,$$

$$\text{då } \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2+k^2} = \frac{1}{(x^2+k^2)^2} \cdot (k^2 - x^2) \leq 0 \quad \text{för } x \geq k$$

Alltså gäller $|s_m(x) - s_{2m}(x)| \geq \frac{1}{8}$ för alla m

då $s_m(x)$ betecknar den m :te partialsumman av funktions-

serien. Alltså gäller $\sup_{x \in [0, \infty)} |s_m(x) - s_{2m}(x)| \not\rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$

Slutsats: Funktionsserien ej likf. konv. på $[0, \infty)$.

⑦ & ⑧ se lösningen