

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2012-08-22, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y''' + \sqrt{3}y'' + 2y' + 2\sqrt{3}y = e^{-\sqrt{3}x}.$$

Notera att $\sqrt{2}i$ är en rot till motsvarande karakteristiska ekvation.

(8p)

2. Lös för $x > 0$ differentialekvationen

$$xy'' - 2y' + \frac{y}{x} = 1.$$

(6p)

3. (a) Taylorutveckla $\ln(1 + \frac{x^2}{2})$ kring 0 med restterm på formen $\mathcal{O}(x^7)$.

(3p)

- (b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}.$$

(5p)

4. (a) För vilka reella tal x är serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{k \ln k}$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(6p)

- (b) Beräkna

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

(4p)

5. Avgör om följderna $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, där $a_1 > 0$ och $a_{n+1} = \arctan a_n$, $n=1,2,3,\dots$, konvergerar och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

(4p)

6. Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd av \mathbb{R} .

(8p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en positiv växande följd som uppfyller villkoret

$$a_{n \cdot m} \geq n a_m$$

för alla positiva heltal n och m . Visa att om

$$\sup\left\{\frac{a_n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\} < \infty$$

så konvergerar följderna $(\frac{a_n}{n})_{n=1}^{\infty}$.

(8p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK