MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2009-12-18, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam Andersson, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$y'' - y' - 2y = \cos^2 x.$$
(8p)

2. (a) Avgör om
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$
existerar, och i så fall beräkna det.
(4p)

   (b) Avgör om
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$$
existerar och i så fall beräkna det.
(4p)

3. Betrakta serien
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}.$$
Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.
(7p)

4. Lös för $x > 0$ differentialekvationen
$$xy'' - 2y' = 1 - \frac{y}{x}.$$
(7p)

5. Avgör om serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})$$

konvergerar.

(6p)

6. För $n = 1, 2, 3, \ldots$ sätt $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$, $x \geq 0$. Avgör om det finns en kontinuerlig funktion $g(x)$, $x \geq 0$ sådan att $ng(x) - e^{-\frac{x}{n}} \geq 0$ för $x \geq 0$ där $\int_0^{\infty} g(x)\, dx$ är konvergent.

(8p)

7. Formulera och bevisa sats om entydighet av Maclaurinutvecklingar.

(8p)

8. Antag att $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd av positiva tal. Antag vidare att

$$M_n = \max\{|\Sigma_{k=1}^{l} b_k| : l = 1, 2, \ldots, n\} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

där $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ är en följd av reella tal. Visa att

$$|\Sigma_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq M_n a_1, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMA976 den 18 december 2007

① Lös $y'' - y' - 2y = \cos^2 x$

Lösning: Detta är en 2:a ordn. linjär diff.ekv. med konstanta koefficienter.

y_h: Karakteristiska ekv. $0 = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$ ger $r_1 = -1$, $r_2 = 2$. Vi får

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

y_p: HL i diff-ekv. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

Ansätt $y_p(x) = a\cos 2x + b\sin 2x + c$. Derivera!

$$y_p'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$$

$$y_p''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$$

Insättning i diff.ekv ger

$$(-4a - 2b - 2a - \tfrac{1}{2})\cos 2x + (-4b + 2a - 2b)\sin 2x - 2c - \tfrac{1}{2} = 0$$

Alltså

$$\begin{cases} 6a + 2b = -\frac{1}{2} \\ 6b - 2a = 0 \\ -2c = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = -\frac{3}{40} \\ b = -\frac{1}{40} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Svar. $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - \frac{3}{40}\cos 2x - \frac{1}{40}\sin 2x - \frac{1}{4}$.

Anm: För att bestämma $y_{p,1}(x)$, lösning till $y'' - y' - 2y = \frac{1}{2}\cos 2x$ kan man alternativt betrakta hjälpekv. $u'' - u' - 2u = \frac{1}{2}e^{2ix}$ och få $y_{p,1}(x) = \mathrm{Re}\, u_p(x)$.

Observera att $\cos 2x = \mathrm{Re}(e^{2ix}) = \mathrm{Re}((e^{ix})^2) \neq (\mathrm{Re}\, e^{ix})^2 = \cos^2 x$.

② a) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ där $f(x,y) = \frac{y^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$

Lösning: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,0) \text{ och } x > 0\}$. Vi ser att $f(1,y) \longrightarrow 0$, $y \to 0$ så om gränsvärdet existerar så måste det vara $= 0$. Polära koordinater kring $(1,0)$, dvs $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ger

$$|f(x,y) - 0| = |\sin^2\theta \ln(1 + r\cos\theta)| \leq |\ln(1 + r\cos\theta)| =$$

$$= r|\cos\theta| + O(r^2) \longrightarrow 0 \quad \text{då } r \to 0 \text{ oberoende av } \theta$$

Svar: gränsvärdet existerar och $= 0$.

b) $\lim_{x \to 1} g(x)$ där $g(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$

Lösning: $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ och } x \neq 1\}$. Det gäller att

$$g(x) = \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \{x = 1+t,\ x \to 1 \leftrightarrow t \to 0\} =$$

$$= \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t \ln(1+t)} = \{\ln(1+t) = t - \tfrac{t^2}{2} + O(t^3),\ t \to 0\} =$$

$$= \frac{(1+t)(t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)) - t}{t \cdot (t + O(t^2))} = \frac{\frac{1}{2}t^2 + O(t^3)}{t^2 + O(t^3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + O(t)}{1 + O(t)} \to \frac{1}{2},\ t \to 0$$

Svar: gränsvärdet existerar och $= 0$

Anm: Man kan (om man absolut insisterar) använda l'Hospitals regel på $\frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}$ (2 ggr).

③ För vilka x är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n \cdot 3^n}$ absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent

Lösning: Sätt $t = 3x-2$ och betrakta potensserien

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot 3^n}$. Då $\sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{3}$, $n \to \infty$

har (*) konvergensradien 3. För

$t = 3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar

$t = -3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent enligt Leibniz kriterium men ej absolutkonvergent.

Alltså är (*) absolutkonvergent för $|t| < 3$, betingat konvergent för $t = -3$ och divergent för övrigt.

Den ursprungliga serien är absolutkonvergent för $|3x-2| < 3$, dvs för $-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$, betingat konvergent för $x = -\frac{1}{3}$ och divergent för övriga x.

Svar: se ovan

④ Lös $xy'' - 2y' = 1 - \frac{y}{x}$ för $x > 0$

Lösning: Diff-ekv är linjär och av Eulersk typ.

$$x^2 y'' - 2xy' + y = x \quad , \quad x > 0$$

Byt oberoende variabel $t = \ln x$ dvs $x = e^t$

sätt $\tilde{y}(t) = y(x(t))$

$$\frac{d}{dx} y(x) = \tilde{y}'(t)\frac{dt}{dx} = \tilde{y}'(t)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \tilde{y}''(t)\frac{dt}{dx}\cdot\frac{1}{x} + \tilde{y}'(t)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t)\right)\cdot\frac{1}{x^2}$$

Insättning i diff.ekv ger $\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = e^t$

dvs $\tilde{y}'' - 3\tilde{y}' + \tilde{y} = e^t$

$\tilde{y}_h$: Karakteristisk ekv $0 = r^2 - 3r + 1 = (r-\frac{3}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 =$

$= (r - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(r - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$ ger

$$\tilde{y}_h(t) = A e^{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})t} + B e^{(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})t}$$

$\tilde{y}_p$: Ansätt $\tilde{y}_p(t) = a e^t$. Insättning i diff.ekv ger $a = -1$

Detta ger $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_h(t) + \tilde{y}_p(t)$ och alla lösn

$$y(x) = \tilde{y}(\ln x) = A x^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} + B e^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} - x.$$

<u>Svar</u>: se ovan

(5) Konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$?

Lösning: Serien är alternerande, av formen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$,

där $a_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$

Vi ser att

$$0 < a_n \le \frac{1}{n}\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx\right) = \frac{\ln n + 1}{n} \to 0, \quad n \to \infty$$

Om $a_{n+1} \le a_n$ för $n = 1, 2, \dots$ kan vi dra slutsatsen att serien konvergerar enligt Leibniz konv. kriterium.

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(n+1)n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} <$$

$$< -\frac{1}{(n+1)\cdot n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

<u>Svar</u>: Serien konvergerar

(6) $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}$ för $x \ge 0$ och $n = 1, 2, \dots$. Finns $g \in C([0,\infty))$ sådan att $ng(x) - e^{-\frac{x}{n}} \ge 0$ för $x \ge 0$ och $\int_0^{\infty} g(x)\,dx < \infty$

Lösning: Vi noterar att $f_n \to 0$ punktvis (och även likformigt) på $[0,\infty)$ och att

$$\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \left[-e^{-\frac{x}{n}}\right]_0^{\infty} = 1, \quad n = 1, 2,$$

Om det skulle funnits en majorerande funktion $g(x)$, dvs 1) $|f_n(x)| \le g(x)$ ($\Leftrightarrow g(x) - e^{-\frac{x}{n}} \ge 0$) och 2) $\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$, så skulle

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0$$

Detta gäller ej då $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$.

Svar: Finns ingen funktion $g(x)$ med egenskaperna enligt problemet

Anm: Man kan alternativt argumentera så här.

Funktionerna $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$ är alla avtagande funktioner på $[0,\infty)$ och alltså är $\sup_n f_n(x)$ avtagande.

Vidare är $f_n(n) = \frac{1}{n}e^{-1}$ $n=1,2,\dots$ (notera att $\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}\left(\frac{x}{n}-1\right) = 0$ då $x=n$). Alltså måste $g(n) \ge \frac{1}{n\cdot e}$ $n=1,2,\dots$ Av detta följer att

$$\int_0^N g(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^N \frac{1}{k\cdot e} = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \to \infty \text{ då } N\to\infty,$$

varför det inte kan finnas $g(x)$ med egenskaperna i problemformuleringen. Observera att då $g \in C([0,\infty])$ gäller att $\int_0^N g(x)\,dx$ existerar för varje $N>0$.

⑦ se PB och/eller ELW

⑧ Antag $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_k \ge 0$ $k=1,2,\dots$ och att

$$M_n = \max\left\{ \left|\sum_{k=1}^{\ell} b_k\right| : \ell = 1,2,\dots,n \right\}, \quad n=1,2,\dots$$

Visa $\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \le M_n \cdot a_1$ $n=1,2,\dots$

Lösning: Sätt $B_k = \sum_{\ell=1}^k b_\ell$, $k=1,2,\dots$

dvs ~~$B_k = \begin{cases} b_1 & k=1 \\ b_k - b_{k-1} & k=2,3,\dots \end{cases}$~~ $b_k = \begin{cases} B_1 & k=1 \\ B_k - B_{k-1} & k=2,3,\dots \end{cases}$

Det gäller

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 B_1 + \sum_{k=2}^n a_k(B_k - B_{k-1}) =$$

$$= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^n a_k B_k - \sum_{k=2}^n a_k B_{k-1} =$$

$$= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\geq 0} B_k + \underbrace{a_n}_{\geq 0} B_n$$

Alltså $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| + a_n |B_n|$.

Men då $B_k = \sum_{l=1}^{k} b_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$ gäller

$|B_k| \leq M_n$ för $k = 1, 2, \ldots, n$

Vi får $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) M_n + a_n M_n = a_1 M_n$.

$\boxtimes$

Anm: Notera att ingen är sagt i problemformuleringen om tecknet på de olika b_k, dvs olika b_k kan ha olika tecken.