

## MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 18/4 2009, 8.30-12.30

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.  
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.  
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.  
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x \cos x \cosh x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(8p)

2. (a) Avgör om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2y}{x^2 + 4y^2 + 4xy}$$

existerar, och i så fall beräkna det.

(4p)

(b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(4p)

3. Beräkna konvergensintervallet för potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} x^k.$$

(7p)

4. För  $p > 0$  sätt

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^p}, \quad x \in [0, 1].$$

- (a) För vilka  $p > 0$  konvergerar  $f_n$  likformigt mot den punktvisa gränsfunktionen  $f$  på  $[0, 1]$ ?
- (b) Avgör om  $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$  då  $n \rightarrow \infty$  för  $p = 2$  och  $p = 4$ .

(7p)

5. Låt  $a > 0$ . Avgör om följderna  $(c_n)_{n=1}^\infty$ , där

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \frac{a}{c_n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

konvergerar, och i så fall beräkna gränsvärdet.

(7p)

6. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$$

konvergerar. Här betecknar  $\lfloor s \rfloor$  det största heltal  $\leq s$  där  $s \in \mathbb{R}$ .

(7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel.

(8p)

8. Låt  $(g_n)_{n=1}^\infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , vara en följd av reellvärda funktioner definierade på intervallet  $[0, 1]$ . Antag att  $0 \leq g_{n+1} \leq g_n(x)$  för alla  $x \in [0, 1]$  och alla  $n$ .

- (a) Visa att  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  existerar för all  $x \in [0, 1]$ .
- (b) Antag vidare att  $g_n$  är kontinuerliga funktioner för alla  $n$  samt att gränsfunktionen  $g(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  är kontinuerlig på  $[0, 1]$ . Visa att  $g_n$  konvergerar likformigt mot  $g$  på  $[0, 1]$ .

(8p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

1) Lös

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x \cos x \cosh x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: karaktär  $r^2 - 2r + 2 = 0$  ger  $r_{1,2} = 1 \pm i$

Medför  $y_h(x) = A e^x \cos x + B e^x \sin x$

Partikulär lösning  $y_p'' - 2y_p' + 2y_p = \frac{x}{2} e^x \cos x + \frac{x}{2} e^{-x} \cos x$

$y_p(x) = \operatorname{Re} u_1(x) + \operatorname{Re} u_2(x)$  där

$u_1'' - 2u_1' + 2u_1 = \frac{x}{2} e^{(1+i)x}$ ,  $u_2'' - 2u_2' + 2u_2 = \frac{x}{2} e^{(-1+i)x}$

$u_1: ((D+1+i)^2 - 2(D+1+i) + 2) z_1(x) = \frac{x}{2}$  ( $u_1(x) = e^{(1+i)x} z_1(x)$ )

$(D^2 + 2iD) z_1(x) = \frac{x}{2}$

$z_1(x) = ax^2 + bx$  ger  $a = -\frac{i}{8}$ ,  $b = \frac{1}{8}$

Alltså  $\operatorname{Re} u_1(x) = \operatorname{Re} \left\{ \left( -\frac{i}{8} x^2 + \frac{1}{8} x \right) e^{(1+i)x} \right\} =$

$= \frac{x^2}{8} e^x \sin x + \frac{x}{8} e^x \cos x$

$u_2: ((D-1+i)^2 - 2(D-1+i) + 2) z_2(x) = \frac{x}{2}$  ( $u_2(x) = e^{(-1+i)x} z_2(x)$ )

$(D^2 + (-4+2i)D + 4-4i) z_2(x) = \frac{x}{2}$

$z_2(x) = cx + d$  ger  $c = \frac{1+i}{16}$ ,  $d = \frac{1}{32} + \frac{1}{16}i$

Alltså  $\operatorname{Re} u_2(x) = \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{1+i}{16} x + \frac{1+2i}{32} \right) e^{(-1+i)x} \right\} =$

$= \left( \frac{1}{16} x + \frac{1}{32} \right) e^{-x} \cos x + \left( -\frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \right) e^{-x} \sin x$

Allmänna lösningen  $y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$

$= \left( \left( A + \frac{x}{8} \right) e^x + \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{16} x \right) e^{-x} \right) \cos x +$

$+ \left( \left( B + \frac{x}{8} \right) e^x + \left( -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} x \right) e^{-x} \right) \sin x$

Bestämmer villkoren

$y(0) = 0$  ger  $A + \frac{1}{32} = 0$  dvs  $A = -\frac{1}{32}$

$y'(0) = 0$  ger  $A + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + B - \frac{1}{16} = 0$ , dvs  $B = -\frac{1}{16}$

Svar:  $y(x) = \left( \left( -\frac{1}{32} + \frac{x}{8} \right) e^x + \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{16} x \right) e^{-x} \right) \cos x +$

$+ \left( \left( -\frac{1}{16} + \frac{x}{8} \right) e^x + \left( -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} x \right) e^{-x} \right) \sin x$

2)

a)  $f(x,y) = \frac{x^3 - x^2 y}{x^2 + 4y^2 + 4xy} = \frac{x^2(x-y)}{(x+2y)^2}$   $D_f = \{(x,y) : x \neq -2y\}$

$$f(x, 0) = x \rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

$$f(x, -\frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{2}) = \frac{x^3 + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}}{x^3} \rightarrow \frac{3}{2} \text{ då } x \downarrow 0. \text{ t.e.s.}$$

(ni ser att  $|f|$  antar godtyckligt stora värden i

$$D_f \cap B((0,0), r) \text{ för varje } r > 0).$$

Gränsvärdet existerar ej

$$\begin{aligned} \text{b) } (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x} = e^{\frac{1}{x^2} \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4))} = \\ &= e^{\frac{1}{x^2} (-\frac{x^2}{2} + o(x^4))} = e^{-\frac{1}{2} + o(x^2)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}, x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Svar: a) gränsvärdet existerar ej; b)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$3) \text{ Beräkna konvergensintervallet för } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} x^k$$

$$\text{Med } a_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} \text{ gäller}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \rightarrow \frac{1}{e}, k \rightarrow \infty$$

$$\text{Alltså } R = e \quad (R = \text{konvergensradie})$$

$$\begin{aligned} \text{Vidare } \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} \cdot e^k &= \exp[-k^2 \ln(1 + \frac{1}{k}) + k] = \\ &= \exp[-k^2(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^3})) + k] = e^{1 + o(\frac{1}{k})} \rightarrow e, k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Alltså } a_k e^k \not\rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\text{Konvergensintervallet: } (-e, e). \quad \text{Svar}$$

$$4) p > 0. \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^p}, \quad x \in [0, 1].$$

$$\text{Vi ser att } f_n(x) \rightarrow f(x) = 0 \text{ punktvis på } [0, 1].$$

$$\text{Beräkna } \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|. \quad (f_n(x) \geq 0)$$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{n}{(1 + n^2 x^p)^2} [1 + n^2(1-p)x^p]$$

Alltså

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} & 0 < p \leq 1 \\ f_n\left(\left(\frac{1}{n^2(p-1)}\right)^{1/p}\right) = n^{1-\frac{2}{p}} \frac{\left(\frac{1}{p-1}\right)^{1/p}}{1 + \frac{1}{p-1}} & p > 1 \end{cases}$$

$$\text{Vi ser att } f_n \rightarrow f \text{ likf. på } [0, 1] \text{ om och endast om } 0 < p < 2.$$

Dirrekt kontroll gör

$$\begin{aligned} p=2 \quad \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \frac{nx}{1+(nx)^2} dx = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{y}{1+y^2} dy = \\ &= \frac{1}{2n} \ln(1+n^2) \rightarrow 0 = \int_0^1 f(x) dx, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$p > 1$   
då  
n  
fyller  
strövt

$$p=4: \int_0^1 f_m(x) dx = \int_0^1 \frac{mx}{1+m^2x^4} dx = \{y = mx^2\} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^m \frac{1}{1+y^2} dy \rightarrow \frac{\pi}{4} \neq \int_0^1 f(x) dx, \quad m \rightarrow \infty$$

Svar: a)  $p \in (0, 2)$ , b) ok  $p=2$ , c) ok  $p=4$ .

5) a) 70

$$c_1 > 0, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2} \left( c_n + \frac{a}{c_n} \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Vi noterar att  $c_n > 0$  alla  $n$  och

$$c_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left( c_n^2 + \frac{a^2}{c_n^2} + 2a \right), \quad \text{då} \quad c_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4} \left( c_n - \frac{a}{c_n} \right)^2 \geq 0.$$

och följaktligen

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2} \left( c_n + \frac{a}{c_n} \right) - c_n = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{c_n} - c_n \right) = \frac{a - c_n^2}{2c_n} \leq 0$$

Alltså  $(c_n)_{n=2}^\infty$  är avtagande och begränsad och

följaktligen konvergent. Med  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  får

$$c = \frac{1}{2} \left( c + \frac{a}{c} \right) \quad \text{vilket ger} \quad c = \sqrt{a} \quad \text{då} \quad c \geq 0.$$

b) Ange om  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \frac{1}{k}$  konvergerar

$$\text{Vi har} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{m} \rfloor}}{m} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right)$$

$$\text{Sätt} \quad a_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Uppskattning med  $\int$ -kriteriet ger

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{1}{x} dx \leq a_k \leq \frac{1}{k^2} + \int_{k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{dvs} \quad 2 \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \leq a_k \leq \frac{1}{k^2} + \ln \left( 1 + \frac{2}{k} \right).$$

Speciellt gäller

$$|a_{k+1} - a_k| \leq \max \left( \frac{1}{(k+1)^2} + \ln \left( 1 + \frac{2}{k+1} \right) - 2 \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{k^2} + \ln \left( 1 + \frac{2}{k} \right) - 2 \ln \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) \right) \leq \frac{4}{k^2}, \quad k \text{ stort}$$

Alltså  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergerar då  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$  konvergerar