# Föreläsning I



**Separabel ODE:** $g(y(x))\,y'(x) = h(x)$, $y(x_0) = y_0$ (lokal lösning för $x \approx x_0$)

**Ex 1:** $y' = (1+y^2)\cos x$, $y(0) = 1$.

$\left( g(y) = \frac{1}{1+y^2},\ h(x) = \cos x,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1 \right)$

Heuristik / Minnesregel: $g(y)\,dy = h(x)\,dx \rightsquigarrow G(y) = H(x) + C \rightsquigarrow$ Lös ut $y = y(x)$ med $y(x_0) = y_0$

$G$: primitiv fkn till $g$; $H$: primitiv fkn till $h$; $C$: konstant

$G(y) = \arctan y \quad H(x) = \sin x$

Lös ut $y = y(x)$, $y(0) = 1$ ur $\arctan y = \sin x + C \rightsquigarrow \boxed{y(x) = \tan\left(\sin x + \pi/4\right)}$

$\left( \arctan y(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sin 0 + C = C \right.$
$\rightsquigarrow C = \pi/4$

Obs: $y(0) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$y'(x) = \Big(1 + \underbrace{\tan^2(\sin x + \pi/4)}_{= y(x)^2}\Big)\cos x = (1 + y(x)^2)\cos x$$

Är $y$ definierad för alla $x \in \mathbb{R}$? Nej: Bara för $\sin x + \pi/4 < \pi/2$

$\iff \sin x < \pi/4 \iff x < \arcsin(\pi/4) \approx 0{,}9033\ldots$

$\rightsquigarrow$ Lösning existerar endast lokalt kring $x = 0$

Vad händer? (Rigoröst)

Låt $G(y) = \int_{y_0}^{y} g(s)\,ds$ och $H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt$

så att $G'(y) = g(y)$ och $H'(x) = h(x)$

$G(y_0) = 0 \qquad H(x_0) = 0$

Kedjeregeln: $\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))\,y'(x) \overset{\text{vill!}}{=} h(x) \rightsquigarrow G(y(x)) = H(x)$

$\rightsquigarrow$ Lös ut $y = y(x)$ (lokalt kring $x = x_0$) [Implicita fkn-satsen behövs egentligen i detta steg $\rightsquigarrow$ Mer om detta i flervarren]

**Ex 2:** $y y' = -x$, $y(0) = 1$ ($x_0 = 0$, $y_0 = 1$) $\quad (g(y) = y,\ h(x) = -x)$

$\rightsquigarrow G(y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \quad [G(y_0) = 0]$

$H(x) = -\frac{x^2}{2} \quad [H(x_0) = 0] \quad \rightsquigarrow G(y) = H(x)$

$\iff y^2 - 1 = -x^2 \iff y(x)^2 = 1 - x^2$

$\underset{y(0)=1}{\iff} y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ — definierad / deriverbar för $-1 < x < 1$.

Obs: $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y(x)}$

$\iff y(x)\,y'(x) = -x \quad \forall -1 < x < 1.$

Linjär ODE (första ordningen): $\overbrace{y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x)}^{(*)}$, $y(x_0) = y_0$

Idé: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \rightsquigarrow F'(x) = f(x)$ and $F(x_0) = 0$

Multiplicera båda led i $(*)$ med $e^F$ (så kallad integrerande faktor):

$$\underbrace{e^{F(x)} y'(x) + f(x) e^{F(x)} y(x)} = e^{F(x)} g(x)$$

Obs: $= \frac{d}{dx}\left(e^{F(x)} y(x)\right)$ [produkt-/kedjerregel]

$$\Longleftrightarrow \quad e^{F(x)} y(x) - \underbrace{e^{F(x_0)}}_{=1} \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left(e^{F(t)} y(t)\right) dt = \int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(x) = e^{-F(x)} y_0 + e^{-F(x)} \int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt$$

Obs: $\cdot\ y(x_0) = y_0$

$\cdot\ y' = -f \cdot e^{-F} \cdot y_0 - f \cdot e^{-F} \int_{x_0}^{x} e^F g\,dt + e^{-F} \cdot e^{F} \cdot g$

$= -fy + g \Leftrightarrow y' + fy = g.$

Ex. 1: $\underline{x^3 y'(x) = 4 \cdot \ln x - 2x^2 y(x)}$, $y(\underset{x_0}{1}) = \underset{y_0}{0}$

$$\underset{(x \neq 0)}{\Longleftrightarrow} \quad y'(x) + \underbrace{\frac{2}{x}}_{f(x)} y(x) = \underbrace{\frac{4 \ln x}{x^3}}_{g(x)}$$

$\cdot\ F(x) = 2 \ln x \quad (F(1) = 0)$

$\cdot\ \int_1^x e^{F(t)} g(t)\,dt = \int_1^x \underbrace{e^{2\ln t}}_{=t^2} \frac{4 \cdot \ln t}{t^3}\,dt = 4 \int_1^x \ln t \,\frac{dt}{t} = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln t & du = \frac{dt}{t} \\ u: 0 \to \ln x & \\ (x > 0) & \end{array} \right\}$

$$= 4 \int_0^{\ln x} u\,du = 2\left[u^2\right]_0^{\ln x} = 2(\ln x)^2$$

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = e^{-F(x)} \cdot 2(\ln x)^2 = 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

Obs: $\cdot\ y(1) = 0$

$\cdot\ y'(x) = 2\left(\frac{x^2 \cdot \frac{2}{x} \ln x - 2x(\ln x)^2}{x^4}\right)$

$= \frac{4}{x^3} \ln x - \frac{2}{x} y(x)$

$\rightsquigarrow x^3 y'(x) = 4 \ln x - 2x^2 y(x).$

Ex 2 [Integralekvation]: $y(x) = x \cdot \int_0^1 y(xt) \tan xt\,dt + \sin x$

Obs: $y(0) = 0$ och $x \cdot \int_0^1 y(xt) \tan xt\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = xt & du = x\,dt \\ u: 0 \to x & \end{array} \right\} = \int_0^x y(u) \tan u\,du$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = y(x) \tan x + \cos x \\ y(0) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y'(x) \underbrace{- \tan x}_{= f(x)} \cdot y(x) = \underbrace{\cos x}_{g(x)}, \quad y(\underset{x_0}{0}) = \underset{y_0}{0} \end{array} \right.$$

$F(x) = + \ln \cos x \quad (F(0) = 0) \rightsquigarrow \int_0^x e^{F(t)} g(t)\,dt = \int_0^x \underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1}{2}(1 + \cos 2t)}\,dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = e^{-F(x)} x = \frac{1}{2\cos x}\left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

# Föreläsning II

a, b konstanter

**Linjär ODE** (andra ordningen): $y''(x)+ay'(x)+by(x)=g(x)$ $\quad y(x_0)=y_0 \quad y'(x_0)=y_1$

**Ex. 1:** $y''-3y'+2y=1 \quad y(0)=1 \quad y'(0)=-2.$

**Trick:** $y''-3y'+2y=\underbrace{(y'-2y)'}_{z'}-\underbrace{(y'-2y)}_{=:z}=1 \rightsquigarrow z'-z=1$

$z(0)=y'(0)-2y(0)=\underline{-4}.$

(Föreläsning I)

$$\rightsquigarrow z(x)=e^{x}\cdot z(0)+e^{x}\int_0^x e^{-t}\cdot 1\,dt=-4e^{x}+e^{x}(1-e^{-x})=-3e^{x}-1.$$

$$\rightsquigarrow y'(x)-2y(x)=-3e^{x}-1 \qquad y(0)=1.$$

(Föreläsning I)

$$\rightsquigarrow y(x)=e^{2x}\underbrace{y(0)}_{=1}+e^{2x}\underbrace{\int_0^x e^{-2t}(-3e^{t}-1)\,dt}_{-3(1-e^{-x})-\frac{1}{2}(1-e^{-2x})}$$

$$=\left(1-3-\tfrac{1}{2}\right)e^{2x}+3e^{x}+\tfrac{1}{2} = -\tfrac{5}{2}e^{2x}+3e^{x}+\tfrac{1}{2}$$

**Obs:** $y(0)=-\frac{5}{2}+3+\frac{1}{2}=1$

$y'(0)=-5+3=-2$

$y'(x)=-5e^{2x}+3e^{x} \qquad y''(x)=-10e^{2x}+3e^{x}$

$$\rightsquigarrow y''(x)-3y'(x)+2y(x)=-10e^{2x}+3e^{x}-3(-5e^{2x}+3e^{x})+2\left(-\tfrac{5}{2}e^{2x}+3e^{x}+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$=0\cdot e^{2x}+0\cdot e^{x}+1=\underline{1}$$

## Vad händer?

**Idé:** Skriv $y''+ay'+by=\underbrace{(y'-r_1y)'}_{z'}-r_2\underbrace{(y'-r_1y)}_{=:z}=g$ för några komplexa tal $r_1,r_2$.

$$\underbrace{\qquad}_{y''-(r_1+r_2)y'+r_1r_2\cdot y} \rightsquigarrow \begin{cases} a=-(r_1+r_2) \\ b=r_1r_2 \end{cases}$$

($\Longleftrightarrow$) $r_1,r_2$ rötter till ekv. $r^2+ar+b=0$ (karaktäristiska ekv.)

**Reduktion till första ordningen:**

$z'-r_2z=g \quad , \quad z(x_0)=y'(x_0)-r_1y(x_0)=y_1-r_1y_0=:z_0$

$$\rightsquigarrow z(x)=e^{r_2(x-x_0)}z_0+e^{r_2(x-x_0)}\int_{x_0}^x e^{-r_2(t-x_0)}g(t)\,dt$$

$$=e^{r_2x}\cdot e^{-rx_0}z_0+\int_{x_0}^x e^{r_2(x-t)}g(t)\,dt=:h(x)$$

- Vi kommer senare att göra reda för vad $x\longmapsto e^{rx}$ betyder då $r$ är ett komplext tal.

$$\rightsquigarrow y'(x)-r_1y(x)=h(x) \quad , \quad y(x_0)=y_0$$

$$\rightsquigarrow y(x)=e^{r_1(x-x_0)}y_0+e^{r_1(x-x_0)}\int_{x_0}^x e^{-r_1(t-x_0)}h(t)\,dt$$

$$=e^{r_1x}(e^{-r_1x_0}y_0)+\int_{x_0}^x e^{r_1(x-t)}h(t)\,dt$$

Ex 2: $y'' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

[Kar. ekv.] $r^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow r_1 = i,\ r_2 = -i.$ (imaginära rötter !)

$\rightsquigarrow\ y'' + y = \underbrace{(y' - iy)'}_{z'} + i\underbrace{(y' - iy)}_{=z} = x$, $z(0) = y'(0) - iy(0) = 1.$

TMA970

$\rightsquigarrow\ z(x) = e^{-ix} z(0) + e^{-ix}\int_0^x e^{it}\, t\, dt = 1 - ix$

$\rightsquigarrow\ y'(x) - iy(x) = 1 - ix$, $y(0) = 0 \rightsquigarrow y(x) = e^{ix}\int_0^x e^{-it}(1 - it)\, dt = \ldots = x$

Obs: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$y'' + y = x$

— * —

Ex 3: $y'' - 2y' + y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

[Kar. ekv.] $\underbrace{r^2 - 2r + 1}_{=(r-1)^2} = 0 \rightsquigarrow r_1 = r_2 = 1$ (dubbelrot!)

$\rightsquigarrow\ y'' - 2y' + y = \underbrace{(y' - y)'}_{=z'} - \underbrace{(y' - y)}_{=z} = 1$, $z(0) = y'(0) - y(0) = 0$

$\rightsquigarrow\ z(x) = e^x \int_0^x e^{-t}\cdot 1\, dt = e^x(1 - e^{-x}) = e^x - 1.$

$\rightsquigarrow\ y'(x) - y(x) = e^x - 1$, $y(0) = 1 \rightsquigarrow y(x) = e^x + e^x\int_0^x \underbrace{e^{-t}(e^t - 1)}_{=1 - e^{-t}}\, dt$

$= e^x + e^x(x - 1 + e^{-x})$

$= xe^x + 1$

Obs: $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$

$y'(x) = (1 + x)e^x$, $y''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$y'' - 2y' + y = (\cancel{2} + \cancel{x})e^x - 2(\cancel{1} + \cancel{x})e^x + \cancel{xe^x} + 1 = 1.$

— x —

Linjär ODE (högre ordning)

Ex. 4: $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

[Kar. ekv.] $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r - 2)(r^2 - 2r + 1)$ $[r_1 = 2,\ r_2 = r_3 = 1]$

$\rightsquigarrow\ y''' - 4y'' + 5y' - 2y = \underbrace{(y'' - 2y' + y)'}_{=z'} - 2\underbrace{(y'' - 2y' + y)}_{=:z} = 0$, $z(0) = y''(0) - 2y'(0) + y(0) = 1$

$\rightsquigarrow\ \underbrace{y'' - 2y' + y}_{(y' - y)' - (y' - y)} = e^{2x} \rightsquigarrow w(x) = e^x\int_0^x e^{-t} e^{2t}\, dt = e^x(e^x - 1) = e^{2x} - e^x$

$\underbrace{(y' - y)'}_{=w'} - \underbrace{(y' - y)}_{=:w}$, $w(0) = 0$

$\rightsquigarrow\ y' - y = e^{2x} - e^x$, $y(0) = 0 \rightsquigarrow y(x) = e^x\int_0^x e^{-t}(e^{2t} - e^t)\, dt$

$= e^x(e^x - 1 - x) = e^{2x} - (1 + x)e^x$

# Föreläsning III

**Sats:** Antag att $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ är $n+1$ ggr kontinuerligt deriverbar.

Fixera $x_0\in(a,b)$. Då gäller det att $\forall y\in\mathbb{R}$ så att $x_0+y\in(a,b)$

att det existerar $\theta=\theta(x_0,y)\in(0,1)$ så att

$$f(x_0+y)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}y^k}_{\text{• Taylorpolynom av grad } n \text{ tillhörande } f \text{ och } x_0.}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta y)}{(n+1)!}y^{n+1}}_{\text{• Lagranges restterm.}}\qquad (*)$$

(oftast mycket liten om $y\approx 0$).

• **Viktigt specialfall:** $c<0<d$, $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ $(n+1)$ ggr

kontinuerligt deriverbar: $\forall y\in(c,d)\ \exists\theta=\theta(y)\in(0,1)$ s.a.

$$g(y)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}y^k}_{\text{• Maclaurinpolynom av grad } n \text{ tillhörande } g.}+\frac{g^{(n+1)}(\theta y)}{(n+1)!}y^{n+1}\qquad (**)$$

**Obs:** $(**)\Rightarrow(*)$: $g(y)=f(x_0+y)$, $c=a-x_0$, $d=b-x_0$

$(\rightsquigarrow g^{(k)}(0)=f^{(k)}(x_0)\ \forall k.)$

——— * ———

Tillämpningar:

Ex 1: $g(y)=e^y$, $g^{(k)}(0)=e^y\big|_{y=0}=1\quad\forall k\geq 0$.

$\rightsquigarrow\ \forall n\geq 0\ \exists\,\theta_n(y)\in(0,1)$ så att

$$e^y=\sum_{k=0}^{n}\frac{y^k}{k!}+\frac{e^{\theta_n(y)\cdot y}}{(n+1)!}$$

I synnerhet: $[y=1]$ $\quad e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}$, $\theta_n=\theta_n(1)\in(0,1)$

$$\rightsquigarrow\ \boxed{0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{e}{(n+1)!}\quad\forall n\geq 0}\qquad (***)$$

Vill att detta leder till en motsägelse.

**Sats** [Euler 1737] $e$ är irrationellt.

**Bevis** [Fourier] Antag att $e=\frac{p}{q}$, $p,q\geq 1$ heltal (d.v.s. $e$ är rationell.)

mult. med $n!$

$$(***)\rightsquigarrow\ 0<\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{e}{(n+1)!}\quad\forall n\geq 0\ \rightsquigarrow\ 0<\underbrace{\frac{pn!}{q}}_{\text{• heltal om } n\geq q.}-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}}_{\text{• heltal } \forall n}<\underbrace{\frac{e}{n+1}}_{<1\ \forall n\geq 2}$$

$\rightsquigarrow$ $\quad 0<\text{heltal}<1$.

$\forall n\geq\max(2,q)$

$\hookrightarrow$ Omöjligt!

$\times$

Ex 2 : $g(y) = \ln(1+y) \rightsquigarrow g^{(1)}(y) = \frac{1}{1+y}$, $g^{(2)}(y) = \frac{-1}{(1+y)^2}$, ..., $\underbrace{g^{(n)}(y) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+y)^n}}_{\forall n \geq 1}$

$\rightsquigarrow g^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \forall n \geq 1 \quad (g^{(0)}(0) = 0)$

$$\rightsquigarrow \ln(1+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k + \frac{g^{(n+1)}(\theta_n y)}{(n+1)!} y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k + \underbrace{\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot(1+\theta_n y)^{n+1}} \cdot y^{n+1}}_{|\cdot| \leq \frac{y^{n+1}}{n+1}}.$$

• Beräkna $\ln(1.1)$ med 4 decimalers noggrannhet.

$$\ln(1.1) = \ln\left(1 + \frac{1}{10}\right) = g\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\left| g\left(\frac{1}{10}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k}{k} \right| \leq \frac{10^{-(n+1)}}{n+1} < 10^{-5} \quad \text{om } n \geq 4$$

4 decimalers noggrannhet

$$\rightsquigarrow \left| \ln(1.1) - \underbrace{\left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^4} \right)}_{= 0{,}0953083\,3\ldots} \right| < 10^{-5}$$

$\rightsquigarrow \ln(1.1) = 0{,}0953\ldots$ skiljer sig åt i femte decimalen.

$(0{,}0953101798\ldots)$ ← 10 decimalers noggrannhet.

Ex 3 : Beräkna Fresnel-integralen $\int_0^1 \sin x^2 \, dx$ med 5 decimalers noggrannhet.

Idé : $g(y) = \sin y \rightsquigarrow g^{(1)}(y) = \cos y$, $g^{(2)}(y) = -\sin y$, $g^{(3)}(y) = -\cos y$, ...

$$\rightsquigarrow g^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ jämn } (=2m) \\ (-1)^m & k = 2m+1 \end{cases}, \quad m \geq 0, \quad |g^{(k)}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \; \forall k$$

$n = 2r+1$

$$\rightsquigarrow \left| \sin y - \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} y^{2m+1} \right| \leq \frac{1}{(2m+2)!} \underbrace{|y|^{2m+2}}_{\leq 1} \quad \forall\, 0 \leq y \leq 1.$$

$y = x^2 \in [0,1]$

$$\rightsquigarrow \left| \sin x^2 - \underbrace{\sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2(2m+1)}}_{p_r(x)} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{(2r+2)!}}_{2(r+1)} < 10^{-6} \quad (\text{om } r \geq 4$$

$$\rightsquigarrow \left| \int_0^1 \sin x^2 \, dx - \int_0^1 p_4(x)\, dx \right| < 10^{-6} \qquad (\underbrace{10! > 10^7})$$

till 5 decimaler

$$\rightsquigarrow \int_0^1 \sin x^2 \, dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^1 p_4(x)\, dx = \int_0^1 \left( x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \frac{x^{14}}{5040} \right) dx = 0.31026\ldots$$

Bevis av $(**)$:  Alt: $\xi = \theta(y) y$, $0 < \theta(y) < 1$.

Vill visa: $\exists\, 0 < \xi < y$ s.a. $g(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} y^{n+1}$ $(\blacksquare)$

$y$ fix!

- Medelvärdessatsen: Om $\varphi: [0,y] \to \mathbb{R}$, $\varphi(0) = \varphi(y)$, $\varphi$ kontinuerligt deriverbar på $(0,y)$

så existerar $\xi \in (0,y)$ s.a. $\varphi'(\xi) = 0$.

Alt version: Om $h, k: [0,y] \to \mathbb{R}$ kontinuerligt deriverbara på $(0,y)$

så existerar $\xi \in (0,y)$ s.a. $(h(y) - h(0))k'(\xi) = (k(y) - k(0))h'(\xi)$.

(Bevis av alt. version: Låt $\varphi(x) = (h(y) - h(0))k(x) - (k(y) - k(0))h(x)$.

Då gäller $\varphi(0) = (h(y) - h(0))k(0) - (k(y) - k(0))h(0) = h(y)k(0) - k(y)h(0)$

$\varphi(y) = (h(y) - h(0))k(y) - (k(y) - k(0))h(y) = -k(y)h(0) + k(0)h(y)$

$\rightsquigarrow \exists \xi \in (0,y)$ s.a. $\varphi'(\xi) = (h(y) - h(0))k'(\xi) - (k(y) - k(0))h'(\xi)$ $\cancel{\diamond}$ )

Bevis av $(\blacksquare)$:

Sätt $h_y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k \rightsquigarrow h_y(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k$, $h_y(y) = g(y)$

$k_y(x) = (y-x)^{n+1} \rightsquigarrow k_y(0) = y^{n+1}$, $k_y(y) = 0$

Vi har även: $h_y'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left( g^{(k+1)}(x)(y-x)^k - g^{(k)}(x) \cdot k(y-x)^{k-1} \right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k+1)}(x)(y-x)^k}{k!} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{(k-1)!}(y-x)^{k-1}}_{= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k+1)}(x)}{k!}(y-x)^k} = \frac{g^{(n+1)}(x)(y-x)^n}{n!}$$

$k_y'(x) = -(n+1)(y-x)^n$

Alt. version av Medelvärdessatsen: $\exists\, 0 < \xi < y$ s.a.

$$\underbrace{(h_y(y) - h_y(0))}\, k_y'(\xi) = \underbrace{(k_y(y) - k_y(0))}\, h_y'(\xi)$$

$$\cancel{-}\left(g(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k\right)(n+1)\underbrace{\cancel{(y-\xi)^n}}_{\neq 0} = \cancel{-}y^{n+1} \cdot \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{n!} \underbrace{\cancel{(y-\xi)^n}}_{\neq 0}$$

$$\rightsquigarrow g(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} y^{n+1}$$ $\cancel{\diamond}$

# Föreläsning IV



**Repetition**: Antag att $g : (-a,a) \to \mathbb{R}$ är $n+1$ ggr kontinuerligt deriverbar.

Då gäller: $\forall |y| < a \; \exists \theta = \theta(y) \in (0,1)$ s.a.

$$g(y) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k}_{\text{Taylorpolynom av grad } n} + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\theta \cdot y)}{(n+1)!} y^{n+1}}_{\text{Lagranges restterm.}} =: R_{n+1}(y)$$

Obs: $\lim_{y \to 0} \frac{R_{n+1}(y)}{y^n} = 0$.

**Sats** [Entydighet] Antag att $g : (-a,a) \to \mathbb{R}$ är $n+1$ ggr kontinuerligt deriverbar, och att det existerar en fkn $Q_{n+1} : (-a,a) \to \mathbb{R}$ sådan att

i) $\lim_{y \to 0} \frac{Q_{n+1}(y)}{y^n} = 0$

ii) $g(y) = p_n(y) + Q_{n+1}(y) \quad \forall y \in (-a,a)$,

där $p_n$ är ett polynom av grad $n$.

Då gäller: $\boxed{p_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k,}$ d.v.s. $p_n$ = Taylorpolynomet av grad $n$.

**Bevis**: Skriv $p_n(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k$ och $g(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k + \underbrace{R_{n+1}(y)}_{\text{Lagrange resttem.}}$

$$\overset{(ii)}{\leadsto} \quad 0 \overset{\forall y \in (-a,a)}{=} g(y) - g(y) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k - \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right) y^k + \left(Q_{n+1}(y) - R_{n+1}(y)\right)$$

$$= \left(a_0 - \frac{g^{(0)}(0)}{0!}\right) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(a_k - \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right) y^k}_{\to 0,\; y \to 0} + \underbrace{\left(Q_{n+1}(y) - R_{n+1}(y)\right)}_{\to 0,\; y \to 0}$$

$$\left[\leadsto \quad a_0 = \frac{g^{(0)}(0)}{0!}\right]$$

$$= \left(a_1 - \frac{g^{(1)}(0)}{1!}\right) y + \sum_{k=2}^{n} \left(a_k - \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\right) y^k + \left(Q_{n+1}(y) - R_{n+1}(y)\right)$$

$\left[\text{Dividera med } y \neq 0, \text{ och låt } y \to 0 \quad \leadsto \quad a_1 = \frac{g^{(1)}(0)}{1!}\right]$, ... fortsätt: $a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k = 0, \dots, n$.

(division med $y^k$, $k = 0, \dots, n$.)

$\times$

Fråga: Kan två olika (oändligt) kontinuerligt deriverbara fkner

$g_1, g_2 : (-a, a) \to \mathbb{R}$ ha samma Taylorpolynom av grad $n$, $\forall n \geq 0$?

$\Big( \Leftrightarrow \exists g_1, g_2$ s.a. $g_1^{(k)}(0) = g_2^{(k)}(0) \quad \forall k \geq 0$ ? $\Big)$
$g_1 \neq g_2$

$\Big( \Leftrightarrow \exists h \neq 0$ s.a. $h^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$ ? $\Big)$

$g_1 = g$
$g_2 = g + h$
(för vilken oändligt deriverbar fkn $g$ som helst.)

Svar: Ja: [Övning: Visa att $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ är oändligt deriverbar och $h^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$.]

——— * ———

Intermezzo [Geometriska summor]

$$s_N = 1 + y + \dots + y^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} y^k \rightsquigarrow \underbrace{s_N - y \cdot s_N}_{=(1-y)s_N} = 1 - y^N \rightsquigarrow \boxed{s_N = \frac{1-y^N}{1-y}} \quad (y \neq 1)$$

$$s_N = N \quad (y = 1)$$

$$\underset{N=n+1}{\rightsquigarrow} \quad \frac{1}{1-y} = \frac{1-y^{n+1}}{1-y} + \frac{y^{n+1}}{1-y} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} y^k}_{\substack{= \text{Taylorpolynom} \\ \text{av grad } n.}} + \frac{y^{n+1}}{1-y}$$

Ex 1:

$y = -x$: $$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

$$\rightsquigarrow \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\, dt$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}}_{\substack{\text{Taylorpolynom av} \\ \text{grad } n+1.}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\, dt}_{= Q_{n+2}(x)} \qquad (*)$$

Övning: $\frac{Q_{n+2}(x)}{x^{n+1}} \to 0$ då $x \to 0$.

Ex 2:

$y = -x^2$: $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

$$\rightsquigarrow \arctan x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}}_{\substack{\text{Taylorpolynom} \\ \text{av grad } 2n+1}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt}_{= Q_{2n+2}(x)}$$

Övning:

$\frac{Q_{2n+2}(x)}{x^{2n+1}} \to 0$ då $x \to 0$.

Övn:

Om $f(x) = \arctan x$, beräkna $f^{(17)}(0)$.

Lösning:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{2k+1} + Q_{18}(x)$$

• Entydighetssatsen!

$$(k=8)\text{-term}: \quad \frac{(-1)^8 \cdot x^{17}}{17} = \frac{f^{(17)}(0) \cdot x^k}{17!}$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{f^{(17)}(0) = 16!}$$

— * —

Olikheter: (i) Visa att $|e^x - 1| \leq |x| e^x$ $\quad\forall x$

$$\left[ e^x = 1 + e^{\theta x} \cdot x \quad \rightsquigarrow |e^x - 1| \leq |x| e^x \right]$$

Ex. (ii) Visa att $|\ln(1+y) - y| \leq y^2/2 \quad \forall y > -1$

$$\left[ \ln(1+y) \overset{n=0\ (x)}{=} y + \underbrace{\int_0^y \frac{(-1)t}{1+t}\, dt}_{|\cdot| \leq y^2/2} \right]$$

Ex. (iii) Visa att $|\cos x - 1 + x^2/2| \leq x^3/6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left[ g(x) = \cos x \rightsquigarrow g(0) = 1,\ g^{(1)}(0) = 0,\ g^{(2)}(0) = -1,\ g^{(3)}(x) = \sin x \quad \left( |g^{(3)}(x)| \leq 1\ \forall x \right) \right.$$

$$\left. \rightsquigarrow g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{g^{(3)}(\theta x) x^3}{3!} \rightsquigarrow |g(x) - 1 + x^2/2| \leq x^3/6 \right]$$

— * —

Centrala gränsvärdessatsen: $\lim_{n\to\infty} \max_{|x|\leq R} \left| \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - e^{-x^2} \right| = 0 \quad \forall R > 0.$

"without loss of generality"

Bevis: • WLOG: $\frac{|x|}{\sqrt{n}} < \pi/2 \rightsquigarrow \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = e^{n \cdot \ln\left(1 + \underbrace{\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)}_{=: y_n(x)}\right)}$

$$= e^{n(\ln(1+y_n(x)) - y_n(x))} \cdot e^{n y_n(x)} = \left( e^{\underbrace{n(\ln(1+y_n(x)) - y_n(x))}_{|\cdot| \leq \frac{1}{2}|y_n(x)|^2 \cdot n}} - 1 \right) e^{n \cdot y_n(x)} + e^{n \cdot y_n(x)}$$

• $y_n(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - 1 = \underbrace{\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{x^2}{2n}\right)}_{z_n(x)} - \frac{x^2}{2n}, \quad |z_n(x)| \leq \frac{x^3}{6 n^{3/2}}$

$$\rightsquigarrow e^{n y_n(x)} = e^{-x^2/2} \cdot e^{n z_n(x)} = e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}\left(e^{n z_n(x)} - 1\right)$$

(i)

$$\rightsquigarrow \left| \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - e^{-x^2/2} \right| \leq e^{\overset{\text{begr.}}{n \cdot y_n(x)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}|y_n(x)|^2 n}_{\leq C_R \cdot \frac{1}{n}} \cdot e^{\overset{\text{begr.}}{\frac{1}{2}|y_n(x)|^2 n}} + e^{-x^2/2} \underbrace{n \cdot |z_n(x)|}_{C_R \cdot 1/\sqrt{n}} \cdot e^{\overset{\text{begr.}}{n \cdot z_n(x)}}$$

$\longrightarrow 0$ likformigt över $|x| \leq R$.

# Föreläsning V



**Def.** [Stort Ordo] Låt $f, g : (-a, a) \to \mathbb{R}$.

Vi säger att $f = \mathcal{O}(g)$ om $\exists\, 0 < \delta < a$ och $M < +\infty$ s.a.

$$|f(x)| \le M|g(x)| \quad \forall |x| < \delta.$$

**Ex.** [Föreläsning IV] $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^3}{6} \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$

(tag. t.ex $M = 1/6$.

[Övning:] Räkneregler för $\mathcal{O}$: $\forall r, s \ge 0$ heltal:

i) $x^r \mathcal{O}(x^s) = \mathcal{O}(x^{r+s})$ och $\pm\mathcal{O}(x^r) = \mathcal{O}(x^r)$

ii) $x^r + \mathcal{O}(x^s) = \mathcal{O}(x^s)$ om $r \ge s$.

iii) $\mathcal{O}(x^r)\mathcal{O}(x^s) = \mathcal{O}(x^{r+s})$ och $\mathcal{O}(x^r) + \mathcal{O}(x^s) = \mathcal{O}(x^{\min(r,s)})$

---

**Ex. 1** Beräkna $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

Vet: 1) $(\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)}$

2) $\ln\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)}_{= 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)} = \left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) + \underbrace{\mathcal{O}\Big(\underbrace{\left(-x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2}_{= x^4 + \mathcal{O}(x^5)}\Big)}_{= \mathcal{O}(x^4)}$

$\ln(1+y) = y + \mathcal{O}(y^2)$

$$= -\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

$\leadsto (\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)} = e^{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)} \to \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$, då $x \to 0$.

---

**Ex. 2** Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5}$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$ [Föreläsning III]

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^7)$ [Föreläsning IV]

$\frac{1+5}{60} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

$\leadsto \sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)$

$- \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right)^5 + \mathcal{O}(x^7)$

$= x - \frac{x^3}{3} + \left(-\frac{1}{6}\, 3x^2\left(-\frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{120} \cdot 2x^5\right) + \mathcal{O}(x^7) = x - \frac{x^3}{3} + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{12}\right)x^5$

②

$\rightsquigarrow \sin(\sin x) - \arctan x = \left(x - x^3/3 + x^5/10 + O(x^7)\right) - \left(x - x^3/3 + x^5/5 + O(x^7)\right)$

$= -x^5/10 + O(x^7)$

$\rightsquigarrow \dfrac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5} \longrightarrow \underline{\underline{-\dfrac{1}{10}}}$.

---

Sats (l'Hospitals regel) Antag att $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbara, och $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Antag att i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$.

ii) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = c$.

Då gäller: $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$.

— x —

Ex. Beräkna $\lim_{x\to 1^+} \underbrace{x^{1/x-1}}_{e^{\frac{1}{x-1}\ln x}}$

$a = 1$, $b = 2$ (t.ex.)

- $f(x) = \ln x$ $g(x) = x-1$ i) uppfyllt!
- $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $g'(x) = 1$ ii) uppfyllt! $[c = 1]$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = e$.

— x —

Bevis av l'Hospital: Sätt $f(a) = g(a) = 0 \rightsquigarrow f, g$ kontinuerliga i $a$.

Tag $a < x < b$; tillämpa medelvärdessatsen (AH. version – föreläsning III)

$\exists\, a < \xi_x < x$ : $(f(x) - \underbrace{f(a)}_{=0})\, \underbrace{g'(\xi_x)}_{\neq 0} = (g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0})\, f'(\xi_x)$

enl. antagande

$\rightsquigarrow \boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}}$

Då $x \to a^+ \rightsquigarrow \xi_x \to a^+$.

Eftersom $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = c$ (enl. ii)

Följer att $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$.

Ex. Visa att $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \frac{a^2}{b^2} \quad \forall a, b > 0$

$f(x) = \ln \cos ax \quad , \quad f(0) = 0$

$g(x) = \ln \cos bx \quad , \quad g(0) = 0$

$f'(x) = \frac{-a \sin ax}{\cos ax} \qquad g'(x) = -\frac{b \sin bx}{\cos bx}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{b} \cdot \underbrace{\frac{\sin ax}{\sin bx}} \cdot \underbrace{\frac{\cos bx}{\cos ax}}_{\substack{\to 1 \\ x \to 0^+}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\sin ax}{ax} \to 1}{\frac{\sin bx}{bx} \to 1}$$

$$\to \frac{a}{b}$$

# Föreläsning VI

## Linjär DE (första ordningen)

- $y_{n+1} = p_n y_n + q_n, \quad \forall n \geq 0.$ ($y_0$ antas vara känd).

Obs: $y_1 = p_0 y_0 + q_0, \quad y_2 = p_1(p_0 y_0 + q_0) + q_1 = p_1 p_0 \cdot y_0 + p_1 q_0 + q_1.$

$y_3 = p_2(p_1 p_0 \cdot y_0 + p_1 q_0 + q_1) + q_2 = p_2 p_1 p_0 \cdot y_0 + p_2 p_1 q_0 + p_2 q_1 + q_2.$

$y_4 = p_3 y_3 + q_3 = p_3 p_2 p_1 p_0 \cdot y_0 + p_3 p_2 p_1 q_0 + p_3 p_2 q_1 + p_3 q_2 + q_3.$

$$\rightsquigarrow \quad y_{n+1} = p_n \cdots p_0 \cdot y_0 + \Big(\underbrace{p_n \cdots p_1}_{=:P_{n,0}} q_0 + \underbrace{p_n \cdots p_2}_{=:P_{n,1}} q_1 + \cdots + \underbrace{p_n}_{=:P_{n,n-1}} q_{n-1} + q_n\Big) \qquad (P_{n,n} := 1)$$

$$= p_n \cdots p_0 \cdot y_0 + \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}\, q_k \quad \forall n \geq 0.$$

Viktigt specialfall: $p_n = r \quad \forall n \geq 0 \qquad y_{n+1} - r y_n = q_n$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{y_{n+1} = r^{n+1} y_0 + \sum_{k=0}^{n} r^{n-k} q_k} \quad \forall n \geq 0. \qquad (*)$$

Ex. Beräkna $y_{57}$ om $y_{n+1} - \overset{=r}{3} y_n = n, \quad y_0 = -2$

$$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad y_{n+1} = 3^{n+1} \cdot (-2) + \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} k = -2 \cdot 3^{n+1} + 3^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} \cdot k}_{=f(1/3)}$$

där $f(x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot x^k = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)$

$$= x \left(\frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}\right)$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2}\left(n \cdot x^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right) \rightsquigarrow f(1/3) = \frac{3}{4}\left(n\, 3^{-(n+1)} - (n+1) 3^{-n} + 1\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad y_{n+1} = -2 \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4}\left(n \cdot 3^{-1} - (n+1) + 3^n\right)$$

$$= \left(-2 + \frac{1}{4}\right) 3^{n+1} + \frac{1}{4}\left(n - 3(n+1)\right) = -\frac{7}{4} \cdot 3^{n+1} - \frac{1}{4}(2n+3)$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{y_{57} = -\frac{7}{4} \cdot 3^{57} - \frac{1}{4}(2 \cdot 56 + 3)}$$

## Linjär DE (andra ordningen)

- $y_{n+2}+ay_{n+1}+by_n=q_n$ ($y_0, y_1$ antas vara kända)

**Idé:** Skriv $y_{n+2}+ay_{n+1}+by_n = \underbrace{\underbrace{(y_{n+2}-r_1y_{n+1})}_{z_{n+1}} - r_2\underbrace{(y_{n+1}-r_1y_n)}_{z_n}}_{y_{n+2}-\underbrace{(r_1+r_2)}_{=a}y_{n+1}+\underbrace{r_1r_2}_{=b}y_n} = q_n$,

för några $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

Dessa måste uppfylla: $\begin{cases} a=-(r_1+r_2) \\ b=r_1\cdot r_2 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $r_1, r_2$ rötter till den karaktäristiska ekv. $r^2+ar+b=0$.

$\rightsquigarrow \quad z_{n+1}-r_2z_n=q_n, \quad z_0=y_1-r_1y_0$

$\overset{(*)}{\underset{\forall n\geq 0}{\rightsquigarrow}} \quad z_{n+1}=r_2^{n+1}z_0+\sum_{k=0}^{n} r_2^{n-k}q_k \rightsquigarrow y_{n+1}-r_1y_n=z_n$

$$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad \boxed{y_{n+1}=r_1^{n+1}y_0+\sum_{l=0}^{n} r_1^{n-l}z_l} \qquad (**)$$

**Ex.** Lös $y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$, $y_0=y_1=0$.

[Kar. ekv] $r^2-3r+2=0 \rightsquigarrow r_1=1, r_2=2$.

Skriv: $y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n = \underbrace{(y_{n+2}-y_{n+1})}_{=z_{n+1}} - 2\underbrace{(y_{n+1}-y_n)}_{=z_n} = \frac{(-1)^n}{n+1}$ $\quad z_0=0$

$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad z_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{n-k}(-1)^k}{k+1} = 2^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k+1}$

$\rightsquigarrow \quad z_n = 2^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k+1} \quad \overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad y_{n+1}=\sum_{l=0}^{n} z_l = \boxed{\sum_{l=0}^{n} 2^{l-1}\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-2)^k}{k+1}}$

$(z_0=0)$

---

**Ex.** Beräkna $y_{17}$ om $y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n=1$, $y_0=1$, $y_1=-1$

[Kar. ekv] $r^2-2r+1=0 \rightsquigarrow r_1=r_2=1$.

Skriv: $y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n = \underbrace{(y_{n+2}-y_n)}_{=z_{n+1}} - \underbrace{(y_{n+1}-y_n)}_{=z_n} = 1$, $\quad z_0=y_1-y_0=\underline{\underline{-2}}$

$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad z_{n+1} = -2+\sum_{k=0}^{n} 1 = -2+n+1 = n-1 \rightsquigarrow z_n=n-2$

$\rightsquigarrow \quad y_{n+1}-y_n=n-2 \quad \overset{(*)}{\rightsquigarrow} \quad y_{n+1}=1+\sum_{l=0}^{n}(l-2) = 1+\frac{n(n+1)}{2}-2(n+1)$

$\rightsquigarrow \quad y_n = 1+\frac{n(n-1)}{2}-2n = \boxed{\frac{1}{2}(n^2-5n+2)}$

Kontroll:
$y_0=1, \ y_1=-1$

$y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n$

$=\frac{1}{2}\left(\left((n+2)^2-5(n+2)+2\right)-2\left((n+1)^2-5(n+1)+2\right)+n^2-5n+2\right) = 1$

3

Viktigt specialfall: $g_n = 0 \ \forall n \geq 0$ och $\boxed{r_1 \neq r_2}$ viktigt!

(**) $\rightsquigarrow$ $y_n = A \cdot r_1^n + B r_2^n$ för några konstanter $A, B$.
(som kan bestämmas från $y_0$ och $y_1$

Övning!

Ex. Beräkna $D_n = \det \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots \\ & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$ för $n \geq 1$.

Ko-faktoruppdelning: $D_{n+2} = 2\cos\alpha \cdot D_{n+1} - 1 \cdot D_n \quad \forall n \geq 1$. (•)

Obs: $D_1 = 2\cos\alpha \qquad D_2 = 4\cos^2\alpha - 1$ — sätt $D_0 = 0$

$\rightsquigarrow$ $D_2 = 2\cos\alpha \cdot D_1 - D_0$ ; så (•) även uppfyllt då $n = 0$.

[Kar. ekv.] $r^2 - 2\cos\alpha \cdot r + 1 = 0$ (Antag $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ så att $\sin\alpha \geq 0$)

$\rightsquigarrow$ $r_1 = e^{i\alpha} \qquad r_2 = e^{-i\alpha}$

$\rightsquigarrow$ $D_n = A e^{in\alpha} + B e^{-in\alpha} \quad \forall n \geq 0$

$D_0 = A + B = 0 \rightsquigarrow B = -A$.

$D_1 = A(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = 2iA\sin\alpha = 2\cos\alpha \rightsquigarrow A = \frac{1}{i}\cot\alpha$

$\rightsquigarrow$ $D_n = \frac{1}{i}\cot\alpha \cdot (e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n}) = \boxed{2\cot\alpha \cdot \sin n\alpha} \quad \forall n \geq 0$.

Kontroll: $D_0 = 0 \qquad D_1 = 2\cot\alpha \cdot \sin\alpha = 2\cos\alpha$

$$D_{n+2} - 2\cos\alpha \cdot D_{n+1} + D_n = 2\cot\alpha\,\Big(\underbrace{\underbrace{\sin(n+2)\alpha}_{\substack{\sin n\alpha \cdot \cos 2\alpha \\ + \cos n\alpha \cdot \sin 2\alpha}} - 2\cos\alpha \cdot \underbrace{\sin(n+1)\alpha}_{\substack{\sin n\alpha \cdot \cos\alpha \\ + \cos n\alpha \cdot \sin\alpha}} + \sin n\alpha}\Big)$$

$$= (\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1)\sin n\alpha$$
$$+ (\sin 2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha)\cos n\alpha = 0$$

$\forall n \geq 0$.

# Föreläsning VII

- $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$
- $f : I \to I$ kontinuerlig.

Obs: Def. $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$, $x_n = f^n(x_0)$, $\forall n \geq 0$.

Betrakta $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Vad kan vi säga om talföljden $(x_n)$?

- Lemma: Antag att gränsvärdet $y := \lim_{n\to\infty} x_n$ existerar. Då gäller $f(y) = y$.

Bevis: $f$ kontinuerlig $\Rightarrow f(y) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = y$. ⌛

- Lemma: Antag att $\exists c < 1$ s.a. $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ $\forall x, y \in I$.

Då gäller i) $\exists!\, y \in I$ s.a. $f(y) = y$.

ii) $\forall x_0 \in I$ så gäller $y = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Bevis: (i) Om $f(y_1) = y_1$ och $f(y_2) = y_2$ så gäller

$$|y_1 - y_2| = |f(y_1) - f(y_2)| \leq c \cdot |y_1 - y_2| \text{ ; då } c < 1 \rightsquigarrow |y_1 - y_2| = 0 \; (y_1 = y_2)$$

$\Rightarrow$ Det existerar högst en lösning till $f(y) = y$.

Då $f(I) \subseteq I$ gäller $a \leq f(a)$ och $f(b) \leq b$.

$\rightsquigarrow$ Om $g(x) = x - f(x)$, så gäller $g(a) \leq 0$ och $g(b) \geq 0$.

$\rightsquigarrow$ [Mellanliggande värden] $\exists y \in [a,b]$ s.a. $g(y) = f(y) - y = 0$,

(Obs $g$ kontinuerlig.)

d.v.s. $f(y) = y$.

(ii) $|x_n - y| = |f(x_{n-1}) - f(y)| \leq c|x_{n-1} - y| = c|f(x_{n-2}) - f(y)|$

$$\leq c^2|x_{n-2} - y| \leq \ldots \leq \underbrace{c^n|x_0 - y|}_{\to 0 \text{ då } c<1}, \quad \forall n \geq 1.$$

⌛

Tenta 13-12-18 5) Avgör om talföljden $x_{n+1} = \dfrac{3}{2 + x_n}$, $x_0 = 2$

är konvergent, och bestäm gränsvärdet.

I detta fall: $f(x) = \dfrac{3}{2+x}$ — Obs. $f(x) = x \Leftrightarrow 3 = x(2+x) \Leftrightarrow x = 1$ eller $x = -3$

(närmast $x_0$.)

Tag $I = [0,3]$ (t.ex.):

Behöver visa i) $f(I) \subseteq I$

ii) $\exists c < 1$ s.a. $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$ $\forall x, y \in I$.

i) $f(0) = 3/2 \in I$, $f(3) = 3/5 \in I$, $f'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2} \neq 0 \quad \forall x \in I$

$\rightsquigarrow f(I) = [3/5, 3/2] \subseteq I.$

ii) $$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{3}{2+x} - \frac{3}{2+y} \right| = 3 \left| \frac{(\cancel{2}+y) - (\cancel{2}+x)}{(2+x)(2+y)} \right|$$

$$= \frac{3|x-y|}{\underbrace{(2+x)}_{\geq 2}\underbrace{(2+y)}_{\geq 2}} \leq \underbrace{\frac{3}{4}}_{c<1} |x-y| \quad \forall x, y \in I.$$

$\rightsquigarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$ unik fixpkt ($f(x) = x$) i $I$.

---

- $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$
- $g : I \to \mathbb{R}$ kontinuerligt deriverbar
- $\exists\, 0 < k_0 < k_1$ så att $k_0 \leq |g'(x)| \leq k_1 \quad \forall x \in I$.
- $f(I) \subseteq I$, där $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$, för $x \in I$.

Lemma [Newton-Raphson] Om $g(y) = 0$ för något $y \in I$, och $x_0 \in I$, så gäller det att: $|x_n - y| \leq \frac{k_1}{k_0} |x_{n+1} - x_n| \quad \forall n \geq 0$, $\quad (*)$

där $x_{n+1} = f(x_n)$.

Bevis: ~~Medelvärdessatsen~~: $\forall n \geq 0 \;\exists\, \xi_n \in (y, x_n)$ s.a.

$$\underbrace{g(x_n) - g(y)}_{= f(x_n)} = \underbrace{g'(\xi_n)}_{k_0 \leq |\cdot| \leq k_1}(x_n - y) \rightsquigarrow |x_n - y| \geq \frac{1}{k_0} |g(x_n)|$$

$$\underbrace{x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}}_{= f(x_n)} \rightsquigarrow |x_{n+1} - x_n| = \frac{|g(x_n)|}{|g'(x_n)|} \geq \frac{1}{k_1} |g(x_n)|$$

$$\rightsquigarrow |x_n - y| \leq \frac{k_1}{k_0} |x_{n+1} - x_n| \quad \forall n$$

---

Ex. Beräkna $\sqrt{2}$ med 3 decimalers noggrannhet.

Tag: $g(x) = x^2 - 2$ — vet $y = \sqrt{2} \in [1, 2] := I$.

$g'(x) = 2x \rightsquigarrow k_0 = 2 \quad k_1 = 4$.

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{(x^2-2)}{2x} = \frac{x^2+2}{2x}$$

$f(1) = 3/2 \in I \quad f(2) = \frac{3}{2} \in I$

$f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - (x^2+2)\cdot 2}{4x^2} = \frac{2(x^2-2)}{4x^2}$

$\rightsquigarrow x = \sqrt{2}$ extrempkt, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in I$

$\rightsquigarrow f(I) \subseteq I$.

$$x_0 = 3/2 \leadsto x_1 = f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$$

$$x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2+2}{2\cdot\frac{17}{12}} = \frac{289+288}{24\cdot 17} = \frac{577}{408}$$

$$x_3 = f(x_2) = f\left(\frac{577}{408}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{577}{408}\right)^2+2}{2\cdot\left(\frac{577}{408}\right)} = \frac{665827}{470832}$$

$$\leadsto |x_3 - x_2| < 6\cdot 10^{-5}$$

$$\underset{n=2}{\overset{(*)}{\leadsto}} |\sqrt{2} - x_2| \leq \left(\frac{4}{2}\right)\cdot |x_3 - x_2| < 12\cdot 10^{-5} < 2\cdot 10^{-4} \leadsto \text{3 decimalers noggrannhet!}$$

$$\leadsto \sqrt{2} = \frac{577}{408} \quad \text{(upp till 3 decimaler)}$$

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots \qquad \frac{577}{408} = 1{,}414215\ldots$$

# Föreläsning VIII



$a_1, a_2, \dots$ talföljd, sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$.

Def:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{(om gränsvärdet existerar)}$$

i vilket fall serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sägs konvergera.

• Lemma 1: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bevis: Låt $s := \lim_{n\to\infty} s_n$;

$$a_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{=s_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}_{=s_{n-1}} = \underset{\downarrow \atop s}{s_n} - \underset{\downarrow \atop s}{s_{n-1}} \to 0, \text{ då } n \to \infty. \quad \times$$

• Viktigt: Omvändningen gäller ej: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar.

Ex. $a_k = \frac{1}{k} \searrow 0$, men $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (ej konvergent!)

Bevis: $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \quad \forall n \geq 1.$$

$\to \infty$, då $n \to \infty$. $\times$

Mer allmänt: $a_k = \frac{1}{k^\rho}$, $\rho > 0$, $\rho \neq 1$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\rho} \rightsquigarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x^\rho} dx}_{\leq \frac{1}{k^\rho}}}_{} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\rho} \leq \underbrace{1 + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\rho}}_{\geq \frac{1}{k^\rho}}}_{}$$

$$= \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x^\rho} = \left[\frac{x^{-\rho+1}}{1-\rho}\right]_1^{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1-\rho}\left((n+1)^{1-\rho} - 1\right)}_{\to \infty \text{ om } \rho < 1.}$$

Serien konvergerar ej!

$$\underbrace{1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^\rho}}_{} = 1 + \left[\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}\right]_1^{n} = 1 + \frac{1}{1-\rho}\left(n^{1-\rho} - 1\right) \leq \underbrace{1 + \frac{1}{\rho - 1}}_{\text{för alla } n \text{ om } \rho > 1.}$$

Vad händer här?

Lemma 2: Om $a_k \geq 0 \ \forall k$, så konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ om och endast om $(s_n)$ är begränsad.

Bevis: ($\Rightarrow$) Om $\lim_n s_n$ existerar så är $(s_n)$ begränsad.

($\Leftarrow$) Om $(s_n)$ begränsad; låt $s := \sup_{n\geq 1} s_n$.

$a_k \geq 0 \ \forall k \rightsquigarrow s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ vi påstår $s = \lim_{n\to\infty} s_n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ s.a. $s \geq s_n \geq s - \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$

$\rightsquigarrow |s - s_n| < \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon \rightsquigarrow \lim_n s_n = s.$

Vad har vi visat?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \begin{cases} \text{konvergerar } \forall p > 1 \\ \text{konvergerar ej } \forall p \leq 1 \end{cases}$$

——— * ———

Integralkriteriet:

(f begränsad)

$f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ monotont avtagande (d.v.s. $\forall s \geq t \rightsquigarrow f(s) \leq f(t)$)

$a_k = f(k)$, $k \geq 1$.

Obs: $a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) = a_k$, $\forall k \geq 1$.

$$\rightsquigarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}}_{= s_{n+1} - 1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx}_{\int_1^{n+1} f(x)\,dx} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n \qquad (*)$$

Integralkriteriet

Vi har visat:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergerar} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < +\infty.}$$

Ex. $f(x) = \frac{1}{x(\ln(2+x))^p}$, $p > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(2+x))^p} = \underbrace{\int_1^2}_{<+\infty} + \underbrace{\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,\underbrace{(\ln(2+x))^p}_{\geq \log x}}}$$

$$\leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p} < +\infty \quad (p > 1.)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k+2))^p} \text{ konvergerar}}$$

Lemma $\Delta_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$

i) begränsad underifrån.

ii) monotont avtagande.

($\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Delta_n$ konvergerar)

Bevis: i) $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx = \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx}_{(*)\ \geq 0} + \underbrace{\int_n^{n+1} f(x)\,dx}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

ii) $\Delta_n - \Delta_{n+1}$

$= -f(n+1) + \underbrace{\int_n^{n+1} f(x)\,dx}_{\geq f(n+1)} \geq 0 \quad \forall n$

$\boxtimes$

<u>Korollarium</u> [Euler 1734] Det existerar en konstant $\gamma$ s.a.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \longrightarrow \gamma, \text{ då } n \to \infty$$

<u>Bevis</u>: $f(x) = \frac{1}{x}$, $\int_1^n f(x)\,dx = \ln n$

$$\Delta_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}\,dx}_{\ln n} \longrightarrow \gamma$$

[ $\gamma \approx 0{,}5772156 6\ldots$ ] kallas ofta för <u>Euler-Mascheronis konstant</u>

— * —

- <u>Geometriska serier</u>: $a_k = x^k$, $k \geq 1$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x^k = x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) \quad \text{om } x \neq 1$$

$$\left(= 1 \quad \text{om } x = 1\right)$$

- $|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$ (konvergerar ej)
- $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ (konvergerar)
- $x = 1 \Rightarrow s_n = n$ (konverg. ej)
- $x = -1 \Rightarrow s_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ jämn} \\ 1 & n \text{ udda} \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ konvergerar ej!

$$\rightsquigarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x^k}_{= \frac{1}{1-x}} \text{ konvergerar } \Longleftrightarrow |x| < 1$$

# Föreläsning IX

Repetition:

- $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ monotont avtagande.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \geq 1$.

Då gäller:

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n \qquad \forall n \geq 1. \qquad (*)$$

* I synnerhet [Integralkriteriet]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) := \lim_{n\to\infty} s_n \text{ existerar}$$

$$\iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{T\to\infty} \int_1^{T} f(x)\,dx \text{ existerar.}$$

(Kor. (Föreläsning VIII)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}} = \begin{cases} \text{konv. om } \beta > 1 \\ +\infty \text{ om } \beta \leq 1 \end{cases}$$
)

—*—

Ex. Definiera $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+t}}$, $t > 0$. Visa att $\lim_{t\to 0^+} t\varphi(t) = 1$.

Sätt $f_t(x) = \frac{1}{x^{1+t}}$, $x \geq 1$ (monotont avtagande)

$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_t(k)$, $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} s_n(t)$ $\forall t > 0$.

$$(*) \qquad s_{n+1}(t) - 1 \leq \underbrace{\int_1^{n+1} f_t(x)\,dx}_{} \leq s_n(t)$$

$$= \left[-\frac{1}{t} x^{-t}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{t}\left(1 - (n+1)^{-t}\right)$$

$$\rightsquigarrow \bullet \; t\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} t s_{n+1}(t) \leq \lim_{t\to\infty} \underbrace{t\underbrace{\left(\frac{1}{t}\left(1-(n+1)^{-t}\right) + 1\right)}_{1-(n+1)^{-t}+t}}_{}$$

$$= 1 + t \to 1, \text{ då } t \to 0^+.$$

$$\bullet \; t\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} t s_n(t) \geq \lim_{n\to\infty} t \frac{1}{t}\left(1 - (n+1)^{-t}\right) = 1.$$

$$\rightsquigarrow \quad 1 \leq \lim_{t\to 0^+} t\varphi(t) \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{t\to 0^+} t\varphi(t) = 1.$$

2

## Teleskoperande summor:

- $b_0, b_1, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

$a_k = b_k - b_{k-1}$, $k \geq 1$. $\rightsquigarrow$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1})$

$= (\cancel{b_1} - b_0) + (b_2 - \cancel{b_1}) + \ldots + (b_n - \cancel{b_{n-1}})$

$= b_n - b_0 \to -b_0$, då $n \to \infty$.

$\rightsquigarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = -b_0$.

— x —

Ex. Beräkna $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Obs: $\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln \underbrace{(k^2-1)}_{(k-1)(k+1)} - \ln k^2$

$= \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln k$

$= \left(\ln(k+1) - \ln k\right) - \left(\ln k - \ln(k-1)\right)$ $\forall k \geq 2$.

$\rightsquigarrow$ $a_k := \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \underbrace{\left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right)}_{=: b_k} - \underbrace{\left(\ln(k+1) - \ln k\right)}_{=: b_{k-1}}$, $k \geq 1$.

$\rightsquigarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -b_0 = \underline{\underline{-\ln 2}}$. ($b_0 = \ln 2$

— x —

- Trivial obs: Antag att $a_1, a_2, \ldots$ och $b_1, b_2, \ldots$ är två talföljder.

Om
- $a_k \geq 0$, $\forall k \geq 1$
- $\exists C > 0$, $M \geq 1$ s.a. $a_k \leq C b_k$ $\forall k \geq M$
- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvegerar.

Bevis: Eftersom $a_k \geq 0$ $\forall k$ så räcker det att visa att $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ är begränsad

$\rightsquigarrow$ $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{M} a_k + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{n} a_k}$

$\leq C \underbrace{\sum_{k=M+1}^{n} b_k}_{\text{begränsad}}$

③

Ex. Konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2}$ ?

Obs. $u^2 \geq 2u \quad \forall u \geq 2. \rightsquigarrow (\ln k)^2 \geq 2\ln k \quad \forall k \geq 4.$

$a_k = e^{-(\ln k)^2}, \quad b_k = e^{-2\ln k} = \frac{1}{k^2} \rightsquigarrow a_k \leq \underbrace{\ }_{C=1} b_k \quad \forall k \geq 4 = M$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar (Föreläsning VIII).

[Trivial obs]

$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar. (Svar = Ja).

# Föreläsning X



Repetition: • $a_1, a_2, \ldots$ reell talföljd.

$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$.

Vi säger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar.

Def. Vi säger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergerar.

• Lemma. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Bevis: Vill visa $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar, där $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Sätt $t_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_k + |a_k|)}_{\geq 0 \ \forall k} \leq 2 \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|}_{=:u} < +\infty$

$\Rightarrow$ $t := \lim_{n\to\infty} t_n$ existerar (då varje term är icke-neg. och partialsummorna är begr.) (Föreläsning VIII)

$\rightsquigarrow$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_k + |a_k|)}_{\to t} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |a_k|}_{\to u} \to t - u$, då $n \to \infty$.

$\times$

• Gäller omvändningen?

D.v.s. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent?

Svar: Nej!

$\rightsquigarrow$ Påstående: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergent, men inte absolutkonvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (Föreläsning VIII)

Specialfall av Leibniz kriterium:

• Lemma: Antag att $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$, $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Då är $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ konvergent. (med $b_k = 1/k$ fås påståendet ovan)

Bevis: Vi skriver $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} b_k$ på två sätt:

1) $s_{2n} = \underbrace{(b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{2n-3} - b_{2n-2})}_{= s_{2n-2} = s_{2(n-1)}} + \underbrace{(b_{2n-1} - b_{2n})}_{\geq 0}$

$\geq s_{2(n-1)}$

$\rightsquigarrow$ $(s_{2n})$ monotont växande.

2) $s_{2n} = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(b_{2n-2} - b_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{b_{2n}}_{\geq 0}$

$\leq b_1 \rightsquigarrow (s_{2n})$ begränsad talföljd.

$\rightsquigarrow \quad s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ existerar.

Obs. $s_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1}}_{\to 0,\ \text{då } n\to\infty} \to s$, då $n \to \infty$

$\rightsquigarrow s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existeor (varför?) $\lozenge$

—— * ——

Ex. Konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ ?

$= (-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k, \quad b_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

För att tillämpa Leibniz behöver vi visa:

1) $b_k \geq b_{k+1} \quad \forall k$

2) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

* 1) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \geq \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \iff 2\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k} + \sqrt{k+2}$

$\iff 4(k+1) \geq k + 2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+2} + k+2 \iff k+1 \geq \sqrt{k}\cdot\sqrt{k+2}$

$\iff \underbrace{(k+1)^2}_{k^2+2k+1} \geq k(k+2) = k^2 + 2k \iff 1 \geq 0$ $\lozenge$

* 2) $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 0$ $\lozenge$

[AH * 1)] $g(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$= -\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}\right)}_{\geq 0} < 0$

Svar = Ja!

$\rightsquigarrow$ $g$ monotont avtagande $\forall x > 0$

$\rightsquigarrow b_k = g(k), k \geq 1$ monotont avtagande.

Ex. Konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^{k-1}k}}_{=a_k}$ ?

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^{k-1}k} \quad \longleftarrow \text{ förläng med } \sqrt{k}-(-1)^{k-1}k$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-(-1)^{k-1}k}{\underbrace{k-k^2}_{=k(1-k)}} = \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1-k)}}_{s_n^{(1)}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{1-k}}_{s_n^{(2)}}$$

$k=0$

- Påstående: $s_i = \lim_n s_n^{(i)}$ existerar för $i=1,2$.

$\left(\Rightarrow \lim_n s_n = \frac{1}{2} + s_1 - s_2 \text{ existerar.}\right)$

- Obs 1: $s_n^{(1)} = -\sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}}_{0 < \cdot < \frac{1}{k^{3/2}}}$ Vet att $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k^{3/2} < +\infty$ (föreläsning VIII)

$\rightsquigarrow \lim_n s_n^{(1)}$ existerar.

- Obs 2: $s_n^{(2)} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Leibniz: $\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)}$ existerar!

——— * ———

# Föreläsning XI



Vi har sett att $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$ $\exists \theta = \theta(x,n) \in (0,1)$

så att

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{\text{Taylorpol. av grad } n} + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{Restterm}}$$

Vad händer då $n \to \infty$?

- Obs. $\left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^n}{(n+1)!} \to 0$, då $n \to \infty$

för alla x

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Taylorserien associerad till fknen $x \mapsto e^x$.

- Mer allmänt: Antag att $(a_k)$ är en reell talföljd, och definiera polynomen: $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

Frågor:

1) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$?

2) Om $f(x)$ konvergeras, gäller t.ex. att

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$ (förutsatt att serien konv.)?

3) $f_n(x)$ är också definierat för komplexa $x$:

— Vad gäller för $f(x)$ för komplexa $x$?

Diskussion av 1)

Rotkriteriet: • Om $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| < 1$ för alla tillräckligt stora $k$ så konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (absolut).

- Om $\sqrt[k]{|a_k|}\, |x| > 1$ för alla tillräckligt stora $k$ så divergerar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Bevis: • Antag att $\exists k_0$ s.a. $\sqrt[k]{a_k}\,|x| \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0$.

$$\leadsto \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k = \sum_{k=0}^{k_0} |a_k|\cdot|x|^k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{n} \underbrace{|a_k||x|^k}_{\leq q^k}}_{\leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} < +\infty} \quad \forall n$$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konverger absolut.

• Antag att $\exists k_0$ s.a. $\sqrt[k]{a_k}\cdot|x| \geq q > 1 \quad \forall k \geq k_0$

Då: $|a_k|\cdot|x|^k \geq q^k \to \infty$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar ej, då termerna inte går mot noll, då $n \to \infty$.

$\boxtimes$

—— * ——

Ex. $a_k = \frac{2^k \cdot (-1)^k}{k}$ — för vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$?
$(k \geq 1)$

$|a_k|^{1/k}|x| = \frac{2}{\sqrt[k]{k}}|x| \leadsto$ • $\forall |x| < 1/2 \ \exists k_x \ \forall k \geq k_x \quad |a_k|^{1/k}|x| < 1$

$\sqrt[k]{k} = e^{\frac{1}{k}\ln k} \to 1, \ k \to \infty$

$\leadsto$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar (absolut) om $|x| < 1/2$.

• $\forall |x| > 1/2 \ \exists k_x \ \forall k \geq k_x \quad |a_k|^{1/k}|x| > 1$

$\leadsto$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ divergerar om $|x| > 1/2$

Återstår att analysera:

• $x = 1/2$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ — konvergerar enl. Leibniz kriterium!

• $x = -1/2$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ — divergerar enl. t.ex. integralkriteriet

$\leadsto$ $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergerar för } -1/2 < x \leq 1/2}$

endast betingat konvergent då $x = 1/2$!

# Konvergensradie

Givet en reell talföljd $a_0, a_1, a_2, \dots$, definiera

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}_{\text{potensserie}} \text{ konvergerar } \underline{\text{absolut}}\}$$

<u>Sats</u> Det finns exakt <u>3</u> <u>möjligheter</u>:

i) $\mathcal{C} = \{0\}$

ii) $\mathcal{C} = \mathbb{R}$

iii) $\exists R > 0$ s.a. $\mathcal{C} = (-R, R)$

$R$ kallas för potensseriens <u>konvergensradie</u>.

<u>Bevis</u>: Eftersom $0 \in \mathcal{C}$ så är $\mathcal{C}$ <u>icke-tom</u>.

- <u>Fall 1</u>: $\mathcal{C}$ <u>obegränsad</u>. $\leadsto$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists x_0 \in \mathcal{C}$ s.a. $|x_0| > |x|$.

  Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|a_k| \cdot |x_0|^k}_{= |a_k x_0|^k} < +\infty$ (då $x_0 \in \mathcal{C}$)

  så konvergerar även $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut.

  $\leadsto$ $\boxed{\mathcal{C} = \mathbb{R}}$

- <u>Fall 2</u>: $R := \sup\{|x| \mid x \in \mathcal{C}\} < +\infty$ (d.v.s. $\mathcal{C}$ begränsad)

  - Om $R = 0$, så måste $\boxed{\mathcal{C} = \{0\}.}$
  - Om $R > 0$; tag $x \in (-R, R)$ — då existerar $x_0 \in \mathcal{C}$ med $|x| \leq |x_0| < R$

  $\leadsto$ $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x_0|^k < +\infty$, då $x_0 \in \mathcal{C}$

  $\leadsto$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar absolut. $\leadsto$ $x \in \mathcal{C}$.

  Då $x$ är godtyckligt i $(-R, R)$, så gäller $\boxed{\mathcal{C} = (-R, R)}$

$\times$

# Föreläsning XII

<u>Konvergens av kplxa talföljder</u>: $z_k = x_k + iy_k$, $z = x + iy$, $x_k, y_k, x, y \in \mathbb{R}$

Vi säger att $z_k \to z$ om $\begin{cases} x_k \to x \\ y_k \to y \end{cases}$.

$c_0, c_1, \ldots$ kplx talföljd, $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

Vi definierar $s = \sum_{k=0}^{\infty} c_k := \lim_n s_n$ existerar.

Vi säger då att $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ <u>konvergerar</u>.

<u>Kom ihåg</u>: Om $c_k = a_k + ib_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, så $|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

Vi säger att $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ <u>konvergerar absolut</u> om $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty$

<u>Lemma</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. abs $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv.

<u>Bevis</u>: $c_k = a_k + ib_k \rightsquigarrow |a_k| \leq |c_k|$ och $|b_k| \leq |c_k|$

Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$ och $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty$.

$\rightsquigarrow x := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ och $y := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergerar.

$$\rightsquigarrow s_n = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)}_{x_k \to x} + i \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)}_{y_k \to y} \longrightarrow x + iy \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ konv.}$$

$\boxtimes$

— * —

Antag att $c_0, c_1, c_2, \ldots$ kplx. talföljd.

- <u>Sats</u> (Föreläsning XI) $\exists R \in [0, \infty]$ s.a. $\forall x \in (-R, R)$

  kallas konvergensradien

  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergerar absolut, (och divergerar $\forall |x| > R$)

  ($R = 0$ — bara för $x = 0$, $R = +\infty$ — för alla $x \in \mathbb{R}$)

- <u>Rotkriteriet</u>: • $f(x)$ <u>konvergerar absolut</u> om $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| < 1$ för alla tillräckligt stora $k$.
  - $f(x)$ <u>divergerar</u> om $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| > 1$ för alla tillräckligt stora $k$.

<u>Sats</u> (Bevis nästa vecka) Antag att konvergensradien $R > 0$.

för $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

<u>Då gäller</u>: $\forall\, |x| < R$

i) $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1}$

ii) $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$,

d.v.s. derivering / integrering kan göras termvis.

— * —

<u>Ex.</u> $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \overset{\text{def!}}{:=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$ $\left( c_k = \frac{\alpha^k}{k!} \right)$

• <u>Påst.</u> $R = +\infty$

<u>Rotkriterium</u>: Tag $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| = \frac{|\alpha| \cdot |x|}{\sqrt[k]{k!}}$

$$\sqrt[k]{k!} = \prod_{\ell=1}^{k} \sqrt[k]{\ell} \underset{\text{Tag } T>0}{=} \underbrace{\left( \prod_{\ell=1}^{T} \sqrt[k]{\ell} \right)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\left( \prod_{\ell=T+1}^{k} \sqrt[k]{\ell} \right)}_{\geq T^{(k-T)/k} \geq T^{1/2}} \geq T^{1/2}$$

för alla $T \leq 2K$.

Då $T > 0$ godtycklig; $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| < 1$, för tillr. stora $k$. $\times$

$$\rightsquigarrow f_\alpha'(x) = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{\alpha^k \cdot k \cdot x^{k-1}}{k!} = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k x^k}{k!} = \alpha \cdot f_\alpha(x)$$

$\rightsquigarrow$ Regel: $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ gäller även för komplexa $\alpha$!

(Jmf. Föreläsning II).

---

<u>Besselfunktioner</u> Betrakta $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ Bessel's ekv.

Ansätt $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ (vi oror oss för konv.-radien senare)

$c_0 = 1$, $c_1 = 0$

$\rightsquigarrow x y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k$ $\quad x^2 y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^k$

$\rightarrow$ Ex. 8 [ELW, 19.4]

# Föreläsning XIII



Repetition:

- $c_0, c_1, c_2, \ldots$ kplx. talföljd.

Betrakta $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Antingen:

i) $f(x)$ konvergerar endast för $x = 0$ (t.ex. om $c_k = e^{k^2}$)

eller

ii) $\exists R \in (0, \infty]$ s.a. $f(x)$ konvergerar (absolut) $\forall |x| < R$

divergerar $\forall |x| > R$

(Om $R = \infty$ så konvergerar $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Veckans mål:

Visa förra veckans svarta låda: Om ii) inträffar, så gäller

I) $f$ oändligt deriverbar på intervallet $(-R, R)$

och $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ $\forall x \in (-R, R)$.

II) $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ $\forall 0 \leq x < R$.

(liknande formel för $-R < x < 0$)

[Kort sagt: Innanför konvergensradien får man derivera och integrera termvis.]

II) är det fundamentala resultatet:

- Lemma II) $\Rightarrow$ I)

Bevis:

Steg 1: Sätt $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$. Påst: $g$'s konvergensradie $\geq R$.

Steg 2: Använd II) på $g$: $\forall 0 \leq x < R$ gäller

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k} c_k x^k}{\cancel{k}} = f(x) - c_0.$$

$\leadsto$

Integralkalkylens fundamentalsats: $g(x) = f'(x)$, vilket skulle visas.

Bevis av påstående i Steg 1:

Vill visa: $\forall |x| < R$ så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ absolut.

Vet: $\forall |x| < R$ så gäller $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot |x|^k < +\infty$.

- Tag $0 < |x| < |x_0| < R$:

Det existerar $k_0 \geq 1$ s.a. $k \leq \left|\frac{x_0}{x}\right|^k \quad \forall k > k_0$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k| \cdot |x|^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{k_0} k |c_k| \cdot |x|^k}_{< +\infty} + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{\infty} k |c_k| \cdot |x|^k}_{\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_k| \cdot \underbrace{\left|\frac{x_0}{x}\right|^k \cdot |x|^k}_{= |x_0|^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot |x_0|^k < +\infty}}_{< +\infty}$$

eftersom $|x_0| < R$

$\otimes$

---

Huvudfokus f.r.o.m. nu: När får vi integrera termvis?

Mer allmänt: Antag att $u_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, $k \geq 0$,

är kontinuerliga fkner sådana att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \quad \text{konvergerar} \quad \forall x \in (a,b).$$

När gäller det att

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\,dt \quad ?$$

Alt. formulation: Betrakta $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$, $n \geq 0$.

Antag att $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in (a,b)$. När gäller det att

$$\int_a^x f(t)\,dt = \lim_n \int_a^x f_n(t)\,dt$$

för alla $a < x < b$ ?

Fråga: Antag att $f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga fkner sådana att $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [c,d]$.

När gäller det att:

$$\int_c^d f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(t)\,dt \quad ?$$

— * —

Inte alltid sant: Antag att $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uppfyller

- $\varphi(0) = 0, \quad \int_0^\infty \varphi(y)\,dy \neq 0$
- $\exists C > 0$ s.a. $|\varphi(x)| \leq \dfrac{C}{1+x^2} \quad \forall x \geq 0$

Tag t.ex. $\varphi(x) = xe^{-x},\ x \geq 0$

Betrakta $f_n(x) = n\varphi(nx), \quad x \in [0,1]$.

$$- \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 \varphi(nx)\,dx = \{y = nx\} = \int_0^n \varphi(y)\,dy \to \int_0^\infty \varphi(y)\,dy \neq 0$$

$$- \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq C \lim_{n\to\infty} \frac{Cn}{1+n^2x^2} = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 \quad (\text{då } \varphi(0) = 0)$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\rightsquigarrow \boxed{0 = \int_0^1 f(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.}$$

— * —

- Likformig konvergens:

Vi säger att $f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ konvergerar likformigt mot $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ om

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[c,d]} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Alternativ formulering: $\forall (x_n) \subset [c,d]$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f_n(x_n)| = 0$$

**Obs.** Konvergensen i förra exemplet är ej likformig. (4)

Fix $x_0 \geq 0$, betrakta talföljden $x_n = x_0/n \in [0,1]$ för stora $n$.

$f_n(x) = n\varphi(nx)$, $f(x) = 0$ för $x \in [0,1]$

Om $f_n \to f$ likformigt skulle det gälla att

$$\lim_{n\to\infty} |\underbrace{f(x_n)}_{=0} - \underbrace{f_n(x_n)}_{n\varphi(x_0)}| = \lim_{n\to\infty} n|\varphi(x_0)| = 0,$$

d.v.s. $\varphi(x_0) = 0$

Men $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt \neq 0$, så det existerar minst ett $x_0 \geq 0$

så att $\varphi(x_0) \neq 0$ $\rightsquigarrow$ Konvergensen ej likformig.

# Föreläsning XIV



**Sats 1)** Antag att $f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot $f : [c,d] \to \mathbb{R}$.

Då gäller:

(i) $f$ kontinuerlig.

(ii) $\int_c^d f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x)\,dx$.

— x —

Innan vi bevisar satsen diskuterar vi en viktig konstruktion av likformigt konvergenta funktionsföljder.

**Sats 2)** [Weierstraß M-test]

Antag att $u_k : [c,d] \to \mathbb{R}$, $k \geq 0$, uppfyller

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max_{x\in[c,d]} |u_k(x)| < +\infty .$$

Definiera

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) , \quad n \geq 0 ,$$

och

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \quad (\text{konvergerar absolut } \forall x \in [c,d]) .$$

Då gäller det att $f_n \to f$ likformigt.

Bevis:

$$f(x) - f_n(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x) - f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x)$$

$$\rightsquigarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \lim_{N\to\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{N} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\max_x |u_k(x)|}_{=a_k}$$

( Vet: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ s.a. $\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} a_k < \varepsilon$.

Fix $\varepsilon > 0$:

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad \max_x |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon .$$

Då $\varepsilon > 0$ godtyckligt $\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \max_x |f(x) - f_n(x)| = 0$,

d.v.s. $f_n \to f$ likformigt.

<u>Tenta 18 dec, 2013</u> 

6) Visa att $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{x^2+k^2}$ konvergerar likformigt mot

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2} \quad \text{på } [0,R].$$

Är konvergensen också likformig på $[0,\infty)$ ?

$u_k(x) = \frac{x}{x^2+k^2}$ ; fixera $R>0$, definiera

$$a_k(R) = \max_{x\in[0,R]} |u_k(x)| \;,\; k \geq 1.$$

$$\leq \frac{R}{k^2} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Använd att } x \leq R \\ \text{och } \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{k^2} \;\; \forall x \geq 0 \end{array} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(R) \leq R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

Weierstraß M-test

$\rightsquigarrow$ $f_n$ konvergerar likformigt mot $f$ (för varje fixt $R>0$).

Vad gäller för $\max_{x\geq 0} |f(x) - f_n(x)|$ ?

$$\underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}}$$

$$\underset{\{x=n\}}{\geq} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)^2}_{\leq 2}} \geq \frac{(2n-n)}{3n} = \frac{1}{3}$$

för alla $n$

$\rightsquigarrow$ $\max_{x\geq 0} |f(x) - f_n(x)| \geq 1/3 \quad \forall n$

$\rightsquigarrow$ $f_n$ konvergerar <u>inte</u> likformigt på $[0,\infty)$.

Bevis av Sats 1: Antag att $f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ kontinuliga, och $f_n \to f$ likformigt.

(i) $f$ kontinuelig: Fix $\varepsilon > 0$, tag $n$ s.a. $\max_{x\in[c,d]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$.

Tag $x \in [c,d] \rightsquigarrow \forall y \in [c,d]$

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \le \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Då $f_n$ kontinulig, $\exists \delta > 0$ s.a.

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$

$\rightsquigarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall |x-y| < \delta. \rightsquigarrow f$ kontinuelig i $x$. ($x$ godtycklig). $\between$

(ii) $\int_c^d f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x)\,dx$:

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx - \int_c^d f_n(x)\,dx\right| \le \int_c^d \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\le \max_{x\in[c,d]} |f(x) - f_n(x)|}\,dx$$

$$\le (d-c)\cdot \max_{x\in[c,d]} |f(x) - f_n(x)| \to 0,$$

då $f_n \to f$ likformigt. $\between$

——— x ———

Kor. Antag att $u_k : [c,d] \to \mathbb{R}$ är kontinueliga, och $\sum_{k=1}^{\infty} \max_{x\in[c,d]} |u_k(x)| < +\infty$.

Då gäller: $$\int_c^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^d u_k(x)\,dx$$

Bevis:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \xrightarrow[\text{Weierstraß M-test}]{\text{likf. konv.}} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

Sats 1 $\Downarrow$

$$\int_c^d f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_c^d f(x)\,dx$$

Kor. $c_0, c_1, c_2, \ldots$ , $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ , konvergensradie $\geq R$. (4)

$\rightsquigarrow$ $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \forall |x| < R,$

likf. konvergens.

och därför gäller $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^{k+1}}{k+1} \quad \forall |x| < R.$ (Jmf. med Föreläsning XIII)

Bevis: $u_k(x) = c_k x^k$

Om $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |x_0|^k < +\infty \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \max_{0 \leq x \leq x_0} |u_k(x)| < +\infty$

(Följer nu från Weierstraß M-test)

# Föreläsning XV

Repetition:

$f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ , $f : [c,d] \to \mathbb{R}$

Def. $f_n \to f$ likformigt om $\max_{x \in [c,d]} |f(x) - f_n(x)| \to 0$.

Sats Om $(f_n)$ kontinuerliga:

i) $f$ kontinuelig

ii) $\int_c^d f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x)\,dx$.

— * —

Tenta 25 April 2019

6) Antag $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinuerliga

och $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ likformigt på $[0,1]$.

Betrakta ODEn

$$(*) \begin{cases} g_n'(x) + g_n(x) = f_n(x) \\ g_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{för } n \geq 1.$$

Visa att $(g_n)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

Föreläsning I:
$$g_n(x) = e^{-x} g_n(0) + e^{-x} \int_0^x e^t f_n(t)\,dt$$
$$= \underbrace{\frac{e^{-x}}{n}}_{\to 0} + e^{-x} \cdot \int_0^x \underbrace{e^t f_n(t)}_{\to e^t f(t)}\,dt$$

Definiera $g(x) = e^{-x} \int_0^x e^t f(t)\,dt$ , $x \in [0,1]$

Vill visa: $\max_{x\in[0,1]} |\underbrace{g(x) - g_n(x)}| \to 0$.

$$\underbrace{-\frac{e^{-x}}{n} + e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) - f_n(t))\,dt}$$

$$|\cdot| \leq \frac{1}{n} + \int_0^1 e^t \underbrace{|f(t) - f_n(t)|}_{\leq \max_{t\in[0,1]} |f(t)-f_n(t)| = b_n}\,dt \leq \frac{1}{n} + e \cdot b_n \to 0$$

$b_n \to 0$ då $f_n \to f$ likf.

$\leadsto$ $g_n \to g$ likformigt.

Ex. [Geom. summa] $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall |x| < 1$

$x = -y^2 \rightsquigarrow \frac{1}{1+y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^{2k} \quad \forall |y| < 1.$

$\rightsquigarrow \arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall 0 \leq y < 1.$

Föreläsning XIV

Obs: $\arctan y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{2k+1}$

definierad $\forall y \in \mathbb{R}$ (kontinuelig)

$\forall 0 \leq y < 1$

Leibniz: Konvergerar då $y = 1$

$\rightsquigarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

---

Dinis sats Antag att $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinueliga,

och att $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall n \quad \forall x \in [a,b]$.

Antag att $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ [gränsvärdet existerar p.g.a. monotonicitet] är kontinuelig

Då konvergerar $f_n$ likformigt mot $f$.

Bevis: Sätt $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, så att $g_n$ är kontinueliga,

$g_n(x) \geq 0$, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \quad \forall n \quad \forall x$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \quad \forall x$

Vill visa: $\max_{x \in [a,b]} g_n(x) = 0$.

Antag motsatsen, d.v.s. $\exists \delta > 0$ och $x_n \in [a,b]$ s.a. $\boxed{g_n(x_n) \geq \delta > 0 \quad \forall n.}$

Svart låda: [Bolzano-Weierstraß lemma – bevisas nästa vecka]

För varje sekvens $(x_n) \subseteq [a,b]$, $\exists$ delföljd $(x_{n_k})$ och $x \in [a,b]$

sådant att $x = \lim_k x_{n_k}$.

Tag nu en delföljd $(x_{n_k})$ och $x \in [a,b]$ så att $x_{n_k} \to x$.

$\forall m$ gäller nu $0 < \delta \leq g_{n_k}(x_{n_k}) \leq g_m(x_{n_k})$ $\forall k$ s.a. $n_k \geq m$.

Eftersom $g_m$ är kontinuelig gäller $\lim_k g_m(x_{n_k}) = g_m(x) \geq \delta$

$m$ godtyckligt:

$\rightsquigarrow \quad g_m(x) \geq \delta > 0 \quad \forall m$

Motsägelse då $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = 0$.

---

**Kor.** Antag att $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \; \forall x \in [a,b]$
kontinuelig

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$.

Då konv. $(f_n)$ likformigt mot $f$.

**Bevis**: Tillämpa Dinis thm på $(f - f_n)$.

---

**Ex.** Låt $f_0(x) = 0$ och $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \quad \forall n \geq 0$

Konvergerar $(f_n)$ likformigt på $[0,R]$ $\forall R > 0$?

**Obs.** $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = \sqrt{x}$ $(\geq f_0(x))$, $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $(\geq f_1(x))$

$f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $(\geq f_2(x))$ ..., d.v.s. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

$f(x) = \lim_n f_n(x)$ måste uppfylla $f(x) = \sqrt{x + f(x)}$

$\iff f(x)^2 = x + f(x) \iff \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{4} \iff \underbrace{f(x)}_{\geq 0} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}_{\geq 1/2} & \end{cases}$

$\rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} & \end{cases}$ kontinuelig på $[\delta, \infty)$ $\forall \delta > 0$.

Enligt korollarium: $f_n \to f$ likformigt på $[\delta, R]$ $\quad 0 < \delta < R$

ej likformigt på $[0,R]$ då $f$ ej kontinuelig på $[0,R]$.

# Föreläsning XVI

Rep. $x_0 \in K \subset \mathbb{R}$, $f: K \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $x_0$ om

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Alt. $f$ kontinuerlig i $x_0$ om $\forall (x_n)$ s.a. $x_n \to x_0$ gäller att $f(x_n) \to f(x_0)$.

— x —

I 2 dimensioner:

$(x_0, y_0) \in K \subset \mathbb{R}^2$, $f: K \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $(x_0, y_0)$ om

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. $\max(|x - x_0|, |y - y_0|) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Alt. $f$ kontinuerlig i $(x_0, y_0)$ om $\forall (x_n, y_n) \subset K$ s.a. $\begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}$

gäller att $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$.

— x —

Hur visar man att en funktion är kontinuerlig?

- Räcker det att visa att $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (x_0, y_0)$ längs med linjer från origo.

  d.v.s. om $f(0,y) \to f(0,0)$ då $y \to 0$

  och $f(x, kx) \to f(0,0)$ då $x \to 0$ $\forall k \in \mathbb{R}$,

  gäller det att $f(x,y) \to f(0,0)$ oavsett hur $(x,y) \to (0,0)$?

Svar: Nej! $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(0,y) = 0 \ \forall y \neq 0 \rightsquigarrow \lim_{y \to 0} f(0,y) = f(0,0)$

$f(x, kx) = \dfrac{k^2 \cdot x^6}{(x^4 + k^2 x^2)^2} = \dfrac{k^2 x^2}{(x^2 + k^2)^2} \rightsquigarrow \lim_{x \to 0} f(x, kx) = f(0,0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Gränsvärdet existerar längs alla linjer.

Men: $\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x^8}}{4 \cdot \cancel{x^8}} = \dfrac{1}{4} \neq 0 \rightsquigarrow f$ ej kontinuerlig!

## Polära koordinater:

Antag att $(x_0, y_0) = (0,0)$ och $f(0,0) = 0$.

$\forall \delta' > 0$ gäller $\max(|x|, |y|) < \delta' \Rightarrow (x^2+y^2)^{1/2} < \delta'\sqrt{2} := \delta$

$\rightsquigarrow$ $f$ kontinuelig i $(0,0)$ omm $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a.

$$(x^2+y^2)^{1/2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon.$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$$G_f(r) = \max_{\theta \in [0,2\pi)} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \ , \quad r \geq 0$$

$\rightsquigarrow$ $f$ kontinuelig i $(0,0)$

$\Longleftrightarrow$ $\lim_{r \to 0} G_f(r) = 0$ ( 1-dim. gränsvärde )

**Ex.** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ kontinuelig i $(0,0)$?

$$G_f(r) = \max_{\theta \in [0,2\pi)} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \max_{\theta \in [0,2\pi)} \frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} \overbrace{|\cos\theta \sin\theta|}^{\leq 1} \leq r$$

$\rightsquigarrow$ $\lim_{r \to 0} G_f(r) = 0$ $\rightsquigarrow$ $f$ kontinuelig.

# Föreläsning XVII



Def. En talföljd är monoton om antingen $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$ (avtagande) eller $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ (växande).

* Repetition: Varje begränsad monoton talföljd är konvergent.

• Sats 1 Varje talföljd $(a_n)$ innehåller en monoton delföljd $(a_{n_k})$.

(Korollarium: Varje begränsad talföljd innehåller en konvergent talföljd.)

Bevis: Vi säger att $(a_{n_0})$ är en vändpkt nedåt om $a_n \leq a_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$.

– Antag att det finns $\infty$ många vändpkter nedåt, säg $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$
$(n_0 > n_1 > n_2 \ldots)$

$\rightsquigarrow$ Då gäller $a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots$, d.v.s.

$(a_{n_k})$ monoton.

– Antag att det inte finns / finns högst ändligt många vändpkter nedåt.

• Inte finns: $\forall n$ $\exists m > n$ s.a. $a_m > a_n$

$\rightsquigarrow$ Starta med godtyckligt $n_0$, välj $n_1 > n_0$ s.a. $a_{n_1} > a_{n_0}$
$n_2 > n_1$ $a_{n_2} > a_{n_1}$
$\vdots$

$\rightsquigarrow$ $a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots$

• Högst ändligt många: Starta med $n_0 >$ högsta index av vändpkterna.

$\rightsquigarrow$ $a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots$

---

Def. En mängd $K \subset \mathbb{R}$ sluten om $\forall (x_n) \subset K$ så att $x = \lim_n x_n$ så gäller $x \in K$.

Ex. $K = [a,b]$ — om $a \leq x_n \leq b$ och $x_n \to x$ så gäller $a \leq x \leq b$.
$\rightsquigarrow$ $[a,b]$ sluten.

$K = (a,b]$ — $x_n = a + \frac{(b-a)}{n} \in K$, men $x_n \to a \notin K$.
$\rightsquigarrow$ $(a,b]$ ej sluten.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuelig, $t \in \mathbb{R}$

$K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = t\}$ sluten (möjligen tom)

( $(x_n) \subset K$ $\quad f(x_n) = t$
$x_n \to x$ $\rightsquigarrow$ $f(x) = t$ $\rightsquigarrow$ $x \in K$

(2)

Def. En mängd $K \subset \mathbb{R}$ är kompakt om den är sluten + begränsad.

Sats (Bolzano-Weierstraß) Om $K \subset \mathbb{R}$ kpt så har varje talföljd i $K$ en konvergent delföljd med gränsvärde i $K$.

Bevis

Tag en talföljd $(x_n)$ i $K$.

$K$ begränsad $\Rightarrow$ $(x_n)$ begränsad $\Rightarrow$ $\exists\, (x_{n_k})$ konvergent.

$K$ sluten $\Rightarrow$ $x = \lim\limits_{k\to\infty} \underset{K}{\underset{\cap}{x_{n_k}}} \in K$.

$\boxtimes$

Tillämpning: $K \subset \mathbb{R}$ kpt, $f: K \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

Då har $f$ ett maxvärde.

Bevis: $\beta = \sup\limits_{x\in K} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$\exists (x_n)$ i $K$

$K$ kpt $\Rightarrow$ $\exists\, (x_{n_k}) \subset K$ och $x \in K$ s.a. $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$

$\rightsquigarrow$ $\beta = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$

$f$ antar sitt maximum $\beta$ i $x$

$\boxtimes$

---

Utvidgning till högre dimensioner

Def. $\underset{x_n}{\overset{\mathbb{R}^2}{\cup}} = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$ om $\left.\begin{matrix} x_n^{(1)} \to x^{(1)} \\ x_n^{(2)} \to x^{(2)} \end{matrix}\right\}$ båda gränsv. i $\mathbb{R}$

Def. $C \subset \mathbb{R}^2$ sluten om varje konvergent $(x_n) \subset C$ har ett gränsvärde i $C$.

Def. $K \subset \mathbb{R}^2$ kpt om sluten + begränsad

delmängd av en box
$|x^{(1)}| \le R$
$|x^{(2)}| \le R$
för ngt. $R > 0$.

Sats (Bolzano-Weierstraß)

Om $K \subset \mathbb{R}^2$ kpt så har varje följd i $K$ en konvergent delföljd.