REELL MATEMATISK ANALYS A

FÖ F

1997

SIDOR: 69

PRIS: ~~25:-~~ ~~30:-~~ 35:-

Läsvecka 1
27/10/97

Reell matematisk analys, del A, ht 1997

F

Kurslitteratur:

- s 1-26 : Persson - Böiers, Analys i en variabel, Studentlitteratur.
- s 26-61 : Eriksson - Larsson - Wahde, Matematisk analys med tillämpningar, del 3.
- s 62-69 : Persson - Böiers, Analys i flera variabler, Studentlitteratur.

8.1 Inledning

Exempel 1: radioaktivt sönderfall

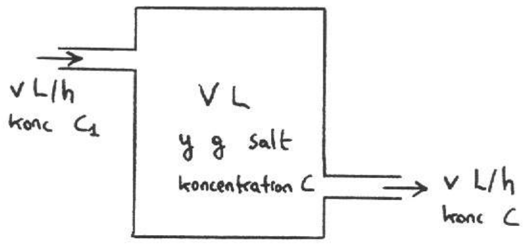
$y'(t)$ är mängden av ett radioaktivt ämne vid tiden t.

Sönderfallshastigheten är $y'(t) = \frac{dy}{dt} = -ky(t)$ där k är en konstant.

Detta är en differentialekvation för y.

Ekvationen kompletteras med begynnelsevillkoret $y(0) = m$

Exempel 2



En behållare med volymen V L innehåller en saltlösning med koncentration $c(t)$ g/L
Vid tiden $t=0$ är $c(0) = C_0$
Tillförs: v L/h av en saltlösning med koncentration C_1 g/L
Avtappas: v L/h av den välblandade lösningen med koncentration $c(t)$

Om $y(t)$ är mängden salt (i gram), gäller $y(t) = V \cdot C(t)$ och

$$y'(t) = v \cdot C_1 - v \cdot C(t) = vC_1 - \frac{v}{V} y(t) \quad , \quad y_0 = VC_0$$

Terminologi

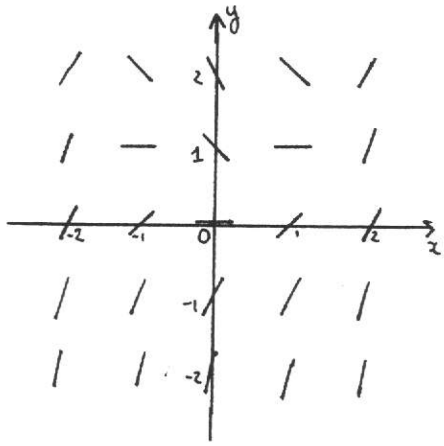
En differentialekvation av <u>första ordningen</u> är av typen $\boxed{y' = f(x,y)}$

En lösning är en funktion $y(x)$ sådan att $y'(x)$ existerar på ett intervall och där uppfyller $y'(x) = f(x, y(x))$

Geometrisk tolkning av första ordningens ekvationer

<u>Riktningsfält</u>:

$y' = x^2 - y$



Eulers metod: $\begin{cases} x_n = x_0 + n \cdot h \\ y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \end{cases}$ $n = 1, 2, \ldots$

8.2 Linjära ekvationer av första ordningen

$y' + g(x)y = h(x)$ löses på följande sätt:

Låt $G(x) = \int g(x)\,dx$ och multiplicera ekvationen med $e^{G(x)}$:

$$e^{G(x)}y' + e^{G(x)}\underbrace{g(x)}_{G'(x)}y = h(x)e^{G(x)}$$

Vänsterledet är derivatan av en produkt: $\frac{d}{dx}\left[e^{G(x)}y\right] = h(x)e^{G(x)}$

Alltså är $e^{G(x)}y = \int h(x)e^{G(x)}dx + C$

$$y(x) = Ce^{-G(x)} + e^{-G(x)}\int h(x)e^{G(x)}dx$$

$e^{G(x)}$ kallas <u>integrerande faktor</u>

Fallet $h(x)=0$ kan läggas på minnet: $\boxed{y' = -g(x)y \Rightarrow y(x) = Ce^{-\int g(x)dx}}$

<u>Exempel</u>

- $y' = x^2 - y \iff y' + y = x^2$
  $g(x) = 1$
  $G(x) = x$
  Integrerande faktor: e^x

$$e^x y' + e^x y = x^2 e^x \iff \frac{d}{dx}(e^x y) = x^2 e^x$$

$$\iff e^x y = \int x^2 e^x dx$$

$$= x^2e^x - \int 2xe^x dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\iff \boxed{y = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}}$$

- Radioaktivt sönderfall

$$\left.\begin{aligned} &y' = -ky \\ &y(t) = Ce^{-kt} \\ &y(0) = m \Rightarrow Ce^0 = m \\ &\qquad\;\;\, \Rightarrow C = m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y(t) = me^{-kt}}$$

När har mängden gått ner till hälften av den ursprungliga?

Säg vid T : $y(T) = \frac{m}{2} \Leftrightarrow me^{-kT} = \frac{m}{2}$

$$\Leftrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{kT} = 2$$

$$\Leftrightarrow kT = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{k} \qquad \text{(halveringstiden)}$$

8.3 Separabla differentialekvationer

En differentialekvation säges vara separabel om den kan skrivas på formen $g(y) \cdot y' = h(x)$

Låt $G(y) = \int g(y)\,dy$

$H(x) = \int h(x)\,dx$

Eftersom $G'(y) = g(y)$ och $H'(y) = h(y)$ så gäller att

$$\underbrace{g(y(x))\,y'(x)}_{G'(y(x))} = h(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} G(y(x)) = \frac{d}{dx} H(x)$$

$$\Leftrightarrow G(y(x)) = H(x) + C$$

Differentialekvationen $g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$ kan skrivas i differentialform $\boxed{g(y)\,dy = h(x)\,dx}$

Lösningen blir helt enkelt $\boxed{\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx}$

Exempel

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

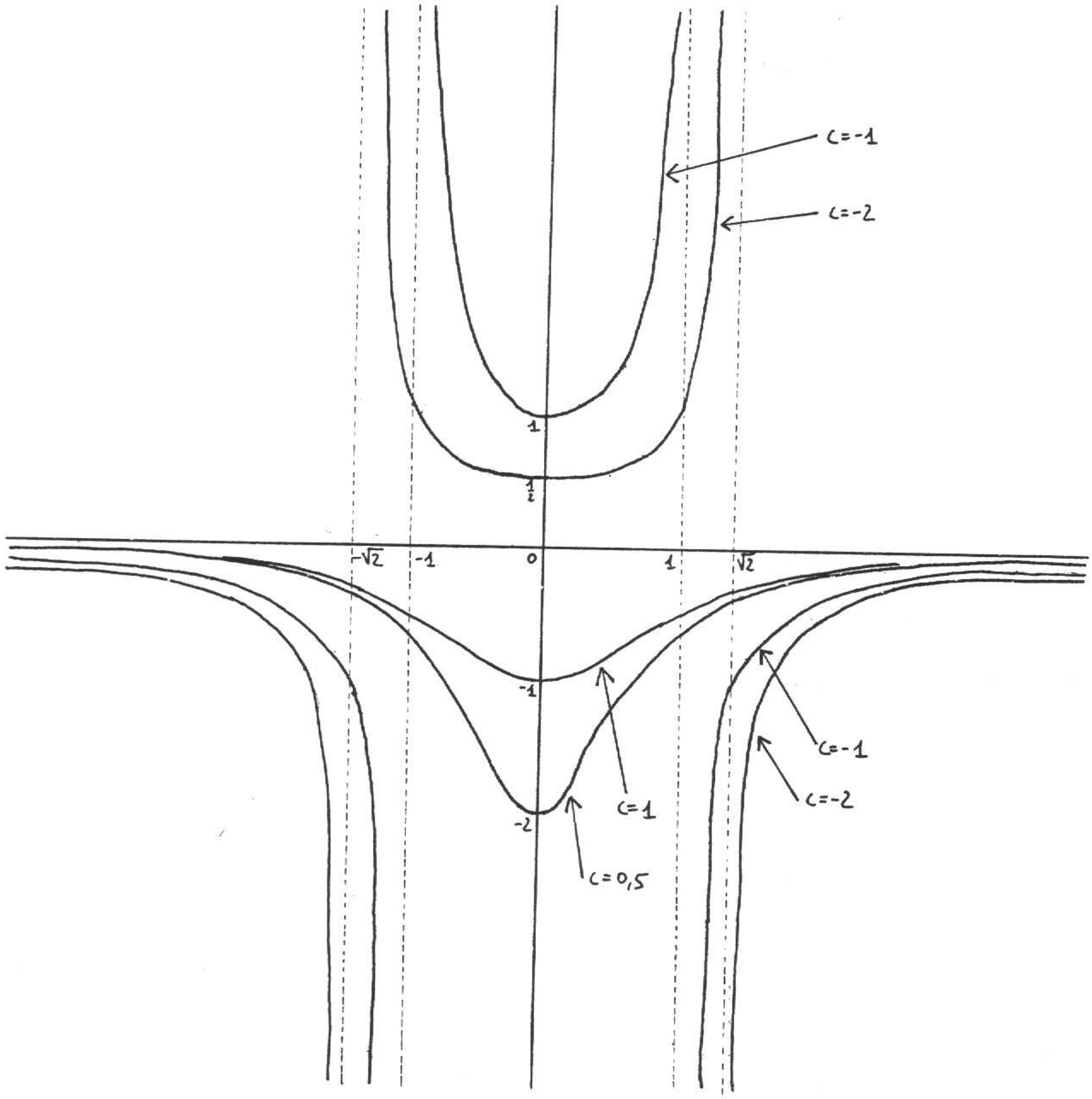
$y = 0$ är en lösning

För $y \neq 0$ är (I) $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{y^2} = 2x\,dx$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{x^2+C} \quad \text{för } x^2 \neq -C}$$



Läsvecka 1
29/10/97

Exempel

$$(x+x^2)\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} = y-y^2 \iff (x+x^2)\,dy = (y-y^2)\,dx$$

Antag $x \neq 0$, $x \neq -1$, $y \neq 0$, $y \neq 1$

$$\frac{dy}{y-y^2} = \frac{dx}{x+x^2} \iff \int \frac{dy}{y-y^2} = \int \frac{dx}{x+x^2}$$

$$\iff \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{dx}{x(1+x)}$$

$$\iff \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$\iff \ln|y| - \ln|1-y| = \ln|x| - \ln|1+x| + C_1$$

$$\iff \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + C_1$$

$$\iff \left|\frac{y}{1-y}\right| = \left|\frac{x}{1+x}\right| \cdot e^{C_1}$$

$$\iff \frac{y}{1-y} = \pm e^{C_1} \frac{x}{1+x}$$

$$\iff \frac{y}{1-y} = C \frac{x}{1+x}$$

$$\iff y(1+x) = Cx(1-y)$$

$$\iff y(1+x) = Cx - Cxy$$

$$\iff y(1+x+Cx) = Cx$$

$$\iff \boxed{y = \frac{Cx}{1+(C+1)x}} \quad , \ C \text{ godtyckligt}$$

$y=0$ en lösning (fås för $C=0$)
$y=1$ en lösning (fås inte för något C, dock då $C \to \infty$)

8.5 Linjära differentialekvationer av ordning n

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$$

Homogen om $h(x) = 0$
Inhomogen om $h(x) \neq 0$

$$D = \frac{d}{dx}, \quad y' = Dy$$
$$y'' = D(Dy) = D^2 y$$
$$y^{(n)} = D^n y$$

$$L[y] = D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 Dy + a_0 y$$
$$= (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)[y]$$

$$L = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 = P(D)$$

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k, \quad a_n = 1, \quad D^0 y = y$$

L är linjär, d.v.s $\begin{cases} L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \\ L[\alpha y] = \alpha L[y], \quad \alpha \text{ konstant} \end{cases}$

ty $\sum_{k=0}^{n} a_k D^k [y_1 + y_2] = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y_1 + \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y_2 \iff P(D)[y_1 + y_2] = P(D)y_1 + P(D)y_2$

Analogt $P(D)[\alpha y] = \alpha P(D) y$

Om y_1 och y_2 är lösningar till $L[y] = 0$ så är också $C_1 y_1 + C_2 y_2$ en lösning för godtyckliga konstanter C_1 och C_2, ty
$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

Detta är superpositionsprincipen

SATS 1

- Om y_p är någon lösning till $L[y] = h(x)$ (en partikulärlösning), så är y en lösning till $L[y] = h(x)$ om och endast om $y_h = y - y_p$ löser $L[y] = 0$.
- Allmänna lösningen till $L[y] = h(x)$ är $\boxed{y = y_p + y_h}$ där y_h är allmän lösning till $L[y_h] = 0$

Bevis: $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = L[y] - h(x)$

8.6 Homogena ekvationer

Betrakta homogena ekvationen $P(D)y = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = 0$
Antag konstanta koefficienten a_k

$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$ kallas karakteristiska polynomet.
$P(r) = 0$ kallas karakteristiska ekvationen

Räkning med operatorpolynom

$$\begin{aligned}
((D+a)(D+b))y &= (D+a)[(D+b)y] \\
&= (D+a)[Dy + by] \\
&= D[Dy + by] + a(Dy + by) \\
&= D^2 y + bDy + aDy + aby \\
&= (D^2 + aD + bD + ab)y
\end{aligned}$$

Alltså: $(D+a)(D+b) = (D^2 + aD + bD + ab)$, dvs vi multiplicerar ihop "som vanligt"

Betrakta $\underbrace{y'' + ay' + by}_{(D^2+aD+b)y} = 0$

karakteristisk ekvation: $r^2 + ar + b = 0$

Om r är konstant är $De^{rx} = re^{rx}$ (sant även om r är complex)
$D^2 e^{rx} = r^2 e^{rx}$

$$(D^2 + aD + b)[e^{rx}] = (r^2 + ar + b)e^{rx} = P(r)e^{rx}$$

e^{rx} en lösning $\Leftrightarrow$ $P(r) = 0$

SATS 2

Låt r_1 och r_2 vara rötterna till karakteristiska ekvationen
$P(r) = r^2 + ar + b = 0$
Då är allmänna lösningen $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ om $r_1 \neq r_2$

$y = (C_1 x + C_2)e^{r_1 x}$ om $r_1 = r_2$

C_1 och C_2 godtyckliga konstanter.

Bevis: $P(r) = (r-r_2)(r-r_1)$

$P(D)y = (D-r_2)(D-r_1)y = 0$

Sätt $z = (D-r_1)y$

Vi får två ekvationer:

$$\begin{cases} (D-r_2)z = z' - r_2 z = 0 \\ (D-r_1)y = y' - r_1 y = z \end{cases}$$

$z' = r_2 z \Rightarrow z = Ce^{r_2 x}$

$y' - r_1 y = Ce^{r_2 x} \quad (=z)$

Integrerande faktor e^{-rx}:

$e^{-r_1 x}y' - r_1 e^{-r_1 x} = Ce^{(r_2-r_1)x} \iff \frac{d}{dx}\left(e^{-r_1 x}y\right) = Ce^{(r_2-r_1)x}$

- $r_1 \neq r_2 \Rightarrow e^{-r_1 x}y = \frac{C}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)x} + C_1$

$$\iff \underline{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$$

- $r_1 = r_2 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-r_1 x}y\right) = C = C_1$

$$\iff e^{-r_1 x}y = C_1 x + C_2$$

$$\iff \underline{y = (C_1 + C_2)e^{r_1 x}}$$

V.S.B.

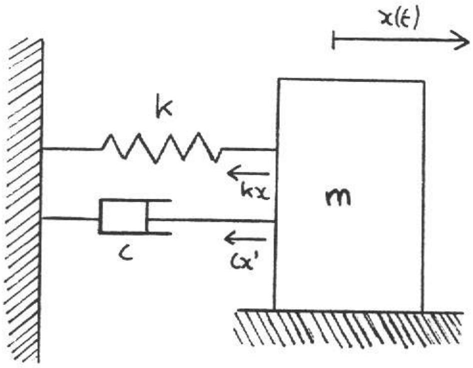
Antag a, b reella
ikke reella rötter $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ $\quad \beta \neq 0$

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= e^{\alpha x}\left[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] \\ &= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \end{aligned}$$

Reell form (A och B godtyckliga reella konstanter)

Läsvecka 1
30/10/97

Ett svängningsproblem



$x = x(t)$ är avvikelsen från jämviktsläget
kroppen påverkas av en fjäderkraft $-kx$ och av en dämpning $-cx'$

Enligt Newtons lag är $mx'' = -kx - cx'$

$$\Leftrightarrow x'' + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\lambda} x' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\mu^2} x = 0$$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2\lambda r + \mu^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = r_1, r_2$

- Om $\lambda < \mu$, skriv $\beta = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$

Då blir $r_{1,2} = -\lambda \pm i\beta$

$x(t) = e^{-\lambda t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$ Dämpad svängning

- Om $\lambda = \mu$ blir $x(t) = (C_1 t + C_2)e^{-\lambda t}$ Kritisk dämpning

- Om $\lambda > \mu$ fås två olika, reella, negativa rötter r_1 och r_2

$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ Överkritisk dämpning

Notera speciellt den odämpade svängningen:

$x'' + \mu^2 x = 0$

$\underline{x(t) = A\cos\mu t + B\sin\mu t}$

8.8 Linjära differentialekvationer av ordning n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$P(D)y = 0$$

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

Karakteristiskt polynom : $P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$

Karakteristisk ekvation : $P(r) = 0$

$$\begin{aligned} D[ze^{cx}] &= z'e^{cx} + cze^{cx} \\ &= e^{cx}(z' + cz) \\ &= e^{cx}(D+c)z \\ &= z_1 e^{cx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2[ze^{cx}] &= D[z_1 e^{cx}] \\ &= e^{cx}(D+c)z_1 \\ &= e^{cx}(D+c)^2 z \end{aligned}$$

$$D^k[ze^{cx}] = e^{cx}(D+c)^k z \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} P(D)[ze^{cx}] &= \sum_{k=0}^{n} a_k D^k[ze^{cx}] \\ &= e^{cx}\sum_{k=0}^{n} a_k (D+c)^k z \\ &= \boxed{e^{cx} P(D+c)[z]} \end{aligned}$$

Förskjutningsregeln

SATS

Om den karakteristiska ekvationen $P(r) = 0$ har de olika rötterna $r_1, r_2, \dots, r_k$ med multipliciteter $m_1, m_2, \dots, m_k$ $(m_1 + m_2 + \dots + m_k = n)$, så är den allmänna lösningen till ekvationen $P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0$

$$(*) \qquad y = p_1(x)e^{r_1 x} + p_2(x)e^{r_2 x} + \dots + p_k(x)e^{r_k x}$$

där $p_j(x)$ är ett godtyckligt polynom av grad högst $m_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$

Bevis

1) Visa att varje funktion av typen (*) är en lösning

För varje j, $1 \le j \le k$, skriv $P(r) = Q_j(r)(r-r_j)^{m_j}$ (faktorsatsen)
Q_j polynom av grad $n-m_j$

$$P(D)[p_j(x)e^{r_j x}] = e^{r_j x} P(D+r_j)[p_j(x)] \quad \text{(förskjutningsregeln)}$$
$$= e^{r_j x} Q_j(D+r_j)\underbrace{D^{m_j}[p_j(x)]}_{0}$$
$$= 0$$

Superpositionsprincipen ger att (*) är en lösning

2) Visa att varje lösning är av formen (*)

Induktion i k

- $k=1$

$P(r) = (r-r_1)^n$
Låt y vara en godtycklig lösning till $P(D)y = 0$
$$D^n[ye^{-r_1 x}] = e^{-r_1 x}(D-r_1)^n[y] \quad \text{(förskjutningsregeln)}$$
$$= e^{-r_1 x}\underbrace{P(D)y}_{0}$$
$$= 0$$
Alltså: $D^n[ye^{-r_1 x}] = 0$

$ye^{-r_1 x} = p_1(x)$, polynom av grad (högst) $n-1$
$y = p_1(x)e^{r_1 x}$
Påståendet klart för $k=1$

Läsvecka 2
03/11/97

- Antag påståendet klart för $k-1$ (där $k>1$)

Låt $P(r) = (r-r_1)^{m_1}\underbrace{(r-r_2)^{m_2}\cdots(r-r_k)^{m_k}}_{Q_1(r)} = Q_1(r)(r-r_1)^{m_1}$
och låt y vara en lösning till $P(D)y = 0$

$$0 = P(D)y = Q_1(D)\underbrace{(D-r_1)^{m_1}y}_{z} = Q_1(D)z = 0$$

Enligt induktionsansatsen är $z = q_2(x)e^{r_2 x} + \cdots + q_k(x)e^{r_k x}$
där $q_j(x)$ är polynom av grad (högst) $m_j - 1$, $j = 2, \ldots, k$

$$(D-r_1)^{m_1} y = z$$

$$D^{m_1}[ye^{-r_1 x}] = e^{-r_1 x}(D-r_1)^{m_1} y \qquad (\text{förskjutningsregeln: } P(D)[e^{cx} z] = e^{cx} P(D+c) z)$$
$$= e^{-r_1 x} z$$
$$= \underline{q_2(x)e^{(r_2-r_1)x} + \dots + q_k(x)e^{(r_k-r_1)x}}$$

Allmänt: Om $q(x)$ är ett polynom och om $c \neq 0$ är

$$\int q(x)e^{cx}dx = \frac{1}{c}e^{cx}q(x) - \int \frac{1}{c}e^{cx}q'(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{c}e^{cx}q(x) - \frac{1}{c^2}q'(x) + \int \frac{1}{c^2}e^{cx}q''(x)\,dx$$
$$= \dots$$
$$= \tilde{q}(x)e^{cx} + C$$ där $\hat{q}(x)$ är ett polynom av samma grad som $q(x)$

Alltså blir $ye^{-r_1 x} = p_1(x) + p_2(x)e^{(r_2-r_1)x} + \dots + p_k(x)e^{(r_k-r_1)x}$ för vissa polynom $p_1(x)$, $p_2(x), \dots, p_k(x)$ av grad (högst) $m_1-1, m_2-1, \dots, m_k-1$

Detta ger påståendet

<u>Exempel</u>

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Karakteristisk ekvation: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \iff (r^2+1)^2 = 0$
$\iff (r-i)^2(r+i)^2 = 0$

$r_1 = i,\ m_1 = 2$
$r_2 = -i,\ m_2 = 2$

$$y = (c_1 x + c_2)e^{r_1 x} + (c_3 x + c_4)e^{r_2 x}$$
$$= (c_1 x + c_2)e^{ix} + (c_3 x + c_4)e^{-ix}$$
$$= (c_1 x + c_2)(\cos x + i\sin x) + (c_3 x + c_4)(\cos x - i\sin x)$$
$$= (c_1 x + c_2 + c_3 x + c_4)\cos x + i(c_1 x + c_2 - c_3 x - c_4)\sin x$$
$$= \boxed{(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x}$$

$\begin{cases} A = c_1 + c_3 \\ B = c_2 + c_4 \end{cases}$ $\begin{cases} C = i(c_1 - c_3) \\ D = i(c_2 - c_4) \end{cases}$ A, B, C, D godtyckliga konstanter.
Vi har lösningar på <u>reell form</u>

Inhomogena ekvationer

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = h(x)$$

1) h(x) ett polynom

Om $a_0 \neq 0$, ansätt $y_p(x) = q(x)$, polynom av samma grad som $h(x)$

Om $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, ansätt $y_p(x) = x^m q(x)$, där grad $q(x)$ = grad $h(x)$

Exempel

$$y''' - y'' = x^2 + 1$$

Karakteristisk ekvation: $r^3 - r^2 = 0 \iff r^2(r-1) = 0$

$$y_h = C_1 x + C_2 + C_3 e^x$$

Ansätt
$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^2(Ax^2 + Bx + C) \\ &= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''' - y_p'' &= A\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x + B\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - (A\cdot 4\cdot 3x^2 + B\cdot 3\cdot 2x + C\cdot 2\cdot 1) \\ &= 24Ax + 6B - 12Ax^2 - 6Bx - 2C \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

koefficientidentifiering:
$$\begin{cases} -12A = 1 \\ 24A - 6B = 0 \\ 6B - 2C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{12} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$y = y_H + y_p$$

2) $h(x) = g(x)e^{\alpha x}$, $g(x)$ polynom
α konstant (eventuellt komplex)

Skriv $y = ze^{\alpha x}$

Då blir, enligt förskjutningsregeln,
$$\begin{aligned} P(D)y &= P(D)[ze^{\alpha x}] \\ &= e^{\alpha x}P(D+\alpha)z \\ &= g(x)e^{\alpha x} \end{aligned}$$

$$\underbrace{P(D+\alpha)}_{P_1(D)}z = g(x)$$

Löses som i 1), ger z_p, $y = z_p e^{\alpha x}$

Exempel

$$y'' - 5y' + 6y = 3(x^2-2)\,e^{3x}$$

$$y = z e^{3x} \Rightarrow (D^2-5D+6)[ze^{3x}] = e^{3x}\left((D+3)^2 - 5(D+3) + 6\right)[z]$$

$$= e^{3x}(D^2+6D+9-5D-15+6)z$$

$$= e^{3x}(D^2+D)z$$

$$= 3(x^2-2)e^{3x}$$

$$(D^2+D)z = z'' + z' = 3(x^2-2)$$

Ansätt $z_P = x(Ax^2+Bx+C)$
$= Ax^3 + Bx^2 + Cx$

Man får $A = 1$
$B = -3$
$C = 0$

$$\underline{y_P = (x^3 - 3x^2)e^{3x}}$$

Läsvecka 2
05/11/97

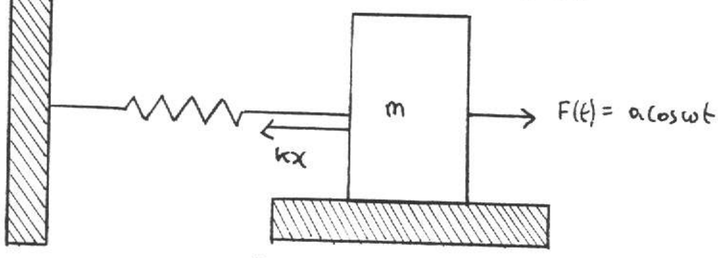
- $h(x) = g(x)\cos\beta x$ eller $h(x) = g(x)\sin\beta x$ där $g(x)$ är ett polynom

Betrakta hjälpekvationen $P(D)u = g(x)e^{i\beta x}$
Om $P(D)$ och $g(x)$ har reella koefficienter blir

$$P(D)[\operatorname{Re} u] = g(x)\cos\beta x$$
$$P(D)[\operatorname{Im} u] = g(x)\sin\beta x$$

Vi får en partikulärlösning: $u_p = x^m\cdot(\text{polynom})\cdot e^{i\beta x}$

Exempel: Tvungna svängningar



$$mx'' = a\cos\omega t - kx$$

$$\Leftrightarrow x'' + \mu^2 x = \frac{a}{m}\cos\omega t \quad , \quad \mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Homogen lösning : $x_h = A\cos\mu t + B\sin\mu t$ (den fria svängningen).

Partikulär lösning: x_p (den tvungna svängningen)

- $\underline{\omega \neq \mu}$

Ansätt $x_p = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

$$-\omega^2 C\cos\omega t - \omega^2 D\sin\omega t + \mu^2 C\cos\omega t + \mu^2 D\sin\omega t = C(\mu^2-\omega^2)\cos\omega t + D(\mu^2-\omega^2)\sin\omega t$$

$$= \frac{a}{m}\cos\omega t$$

Alltså: $C(\mu^2-\omega^2) = \frac{a}{m}$ och $D\underbrace{(\mu^2-\omega^2)}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{a}{m(\mu^2-\omega^2)}$ och $D = 0$

$$x_p = \frac{a}{m(\mu^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

- $\underline{\omega = \mu}$

Ansätt $x_p = t(C\cos\mu t + D\sin\mu t)$

Derivering och insättning i differentialekvationen ger

$C = 0$ och $D = \dfrac{a}{2\mu m}$

$$x_p = \frac{a}{2\mu m} t \sin\mu t$$

<u>Exempel:</u>

$$y''' + y' = x\cos x$$

Karakteristisk ekvation:
$$P(r) = r^3 + r$$
$$= r(r^2+1)$$
$$= r(r-i)(r+i) \qquad r_1 = 0,\ r_2 = i,\ r_3 = -i$$

$$\underline{y_h = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x}$$

Lös $u''' + u' = P(D)u = xe^{ix}$

Om u är en lösning, så är $y = \operatorname{Re} u$ en lösning till ursprungliga ekvationen.

Skriv $u = ze^{ix}$ och använd förskjutningsregeln

$$
\begin{aligned}
P(D)u &= P(D)[ze^{ix}] \\
&= e^{ix} P(D+i) z \\
&= xe^{ix}
\end{aligned}
$$

$$P(D+i)z = x$$

$$(D+i)D(D+2i)z = x \iff D(D^2+3iD-2)z = x$$
$$\iff (D^3+3iD^2-2D)z = x$$

Ansätt $z_p = x(ax+b) = ax^2 + bx$

$$(D^3+3iD^2-2D)[ax^2+bx] = 3i \cdot 2a - 2(2ax+b)$$
$$= x$$

$$\begin{cases} -4a = 1 \\ 6ia - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{3i}{4} \end{cases}$$

$$z_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}ix$$

$$u_p = z_p e^{ix} = -\frac{1}{4}(x^2 + 3ix)(\cos x + i \sin x)$$

$$\underline{y_p = \operatorname{Re} u_p = -\frac{1}{4}(x^2 \cos x - 3x \sin x)}$$

$$\underline{y = y_h + y_p}$$

- Antag $P(D)y = h(x) = h_1(x) + h_2(x)$

Lös $P(D)y_1 = h_1(x)$ och $P(D)y_2 = h_2(x)$ (y_1 och y_2 partikulärlösningar)

Då är $y_p = y_1 + y_2$ en partikulärlösning till $P(D)y = h(x)$

ty
$$
\begin{aligned}
P(D)y &= P(D)[y_1 + y_2] \\
&= P(D)y_1 + P(D)y_2 \\
&= h_1(x) + h_2(x) \\
&= h(x)
\end{aligned}
$$

Speciella ekvationer

1) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Sätt $z = \frac{y}{x}$

$$y = xz$$
$$y' = xz' + z = f(z)$$
$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z \qquad \text{Separabel ekvation}$$
$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|x| + C$$

2) $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = h(x)$ (Eulers ekvation)

Sätt $t = \ln x$, $x > 0$
$x = e^t$
$D_x = \frac{d}{dx}$, $D_t = \frac{d}{dt}$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$
$$= D_x y$$
$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$
$$= \frac{1}{x} D_t y$$

$$x D_x = D_t \quad \Rightarrow \quad D_x = e^{-t} D_t$$

$$\begin{aligned} x^2 D_x^2 y &= x(xD_x)D_x y \\ &= e^t D_t [e^{-t} D_t] y \\ &= e^t D_t [e^{-t} D_t y] \\ &= e^t (e^{-t} D_t^2 y - e^{-t} D_t y) \\ &= D_t^2 y - D_t y \end{aligned}$$

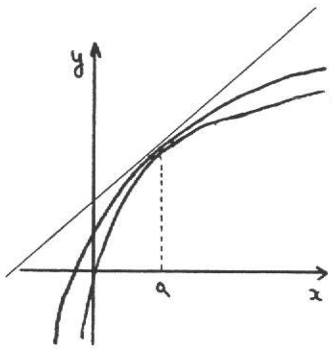
$$\Rightarrow x^2 D_x^2 = D_t^2 - D_t$$
$$= D_t(D_t - 1)$$

Analogt för $x^3 D_x^3$ osv.
Man får en ekvation i t med konstanta koefficienterna

Läsvecka 2
06/11/97

MACLAURINS OCH TAYLORS FORMEL

9.1 Inledning



9.2 Maclaurins och Taylors formel

SATS

Antag f har kontinuerliga derivator av ordning t.o.m. $n+1$ i ett intervall I som innehåller punkten a.
För $x \in I$ är då

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + R_{n+1}(x) \qquad \text{(med konventionen } 0^0 = 1\text{)}$$

$$= P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

där

$$R_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$P_n(x)$ kallas <u>Taylorpolynomet av grad n</u>
$R_{n+1}(x)$ kallas <u>resttermen av ordning $n+1$</u>

Bevis:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t)\,dt = f(a) + R_1(x)$$

$$R_1(x) = \Big[(t-x)f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt = f'(a)(x-a) + R_2(x)$$

$$R_2(x) = \left[-\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right] + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt = \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + R_3(x)$$

Allmänt:

$$R_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt = \left[-\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right] + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{k+1}(x)$$

Vilket ger påståendet

Lagranges restterm:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{för något } \xi = \xi(x) \text{ mellan } a \text{ och } x$$

Vi påminner om integralkalkylens medelvärdessats:
Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[a,b]$, och om $g(x)$ ej växlar tecken, är

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } a \text{ och } b$$

Om $a=0$ är $\xi = \theta b$, $0<\theta<1$

Enligt denna sats

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= f^{(n+1)}(\xi)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$= \underline{H_{n+1}(x)(x-a)^{n+1}}$$ där $H_{n+1}(x)$ är kontinuerlig (och därmed begränsad) i en omgivning av a.

Fallet $a=0$ kallas Maclaurins formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

9.3 Standardutvecklingar

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$

Bevis: Om $f(x) = e^x$ är $f^{(k)}(x) = e^x$ och speciellt $f^{(k)}(0) = 1$ för alla k.

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Bevis:
$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x$

$f^{(2k)}(0) = 0$
$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{2n+1} \frac{\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n-1}$

Bevis:
$f(x) = (1+x)^\alpha$
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$
$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$

Läsvecka 3
10/11/97

Exempel:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1 \qquad \text{(geometrisk summa)}$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \int_0^x \left[1 - t + t^2 - \dots + (-t)^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t}\right] dt$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt}_{R_{n+1}(x)}$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

$$= (-1)^n \frac{1}{1+\theta x}\int_0^x t^n\,dt$$

$$= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$$

Analogt för $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

9.4 Entydighet av Maclaurinutvecklingar

SATS

Antag att f och dess derivator t.o.m. ordning $n+1$ är kontinuerliga i en omgivning av $x=0$.
Antag vidare att $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^{n+1} h(x)$ där $h(x) \to 0$ då $x \to 0$
Då är detta Maclaurinutvecklingen av $f(x)$

Bevis:

Enligt Maclaurins formel är $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{n+1}H(x)$
där $H(x)$ är kontinuerlig.

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n h(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{n+1}H(x)$$

Sätt $x=0$. Får $a_0 = f(0)$

Utnyttja detta och dividera med x:

$$a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + x^n h(x) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + \dots + x^n H(x)$$

$x=0$ ger $a_1 = f'(0)$

Osv. upp till $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $h(x) = H(x)$

Exempel

- Beräkna ett närmevärde av $\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,dx$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{\cos\theta t}{6!}t^6 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{\cos\theta x^2}{720}x^{12}$$

$$\frac{1-\cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{\cos\theta x^2}{720}x^8$$

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{720}\int_0^1 \cos\theta x^2\cdot x^8\,dx$$

$$= \frac{59}{120} + \delta$$

$$\simeq 0{,}4917 + \delta \quad \text{där} \quad 0<\delta<\frac{1}{720}\int_0^1 x^8\,dx = \frac{1}{720\cdot 9} \simeq 1{,}54\cdot 10^{-4} < 2\cdot 10^{-4}$$

- Maclaurinutveckla $e^x\cos x$ med restterm av ordning 5

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5 B_1(x)$, $B_1(x)$ begränsad funktion

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_2(x)$, $B_2(x)$ begränsad funktion

$$e^x\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B_2(x)+x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}+x^7B_2(x)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5B_3(x)$$

$$= \underline{1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+x^5B(x)} \qquad B(x) \text{ begränsad}$$

Definition:

En funktion sägs vara $O(x^n)$ ("stort ordo x^n", för x nära 0) om det finns en konstant M så att $|f(x)| \leq M|x|^n$ för alla x i en omgivning av $x=0$.

Det gäller t.ex. att $O(x^n) \pm O(x^n) = O(x^n)$

$$O(x^n)\cdot O(x^m) = O(x^{n+m})$$

Om $y = O(x^n)$ $(n>0)$ är $O(y^p) = O(x^{np})$

För $h(y) = O(y^p)$ är $|h(y)| \leq M_1|y|^p$ för y nära 0

Om x ligger nära 0 så är y nära 0, $|y| \leq M_2|x|^n$ och $|h(y)| \leq M_1M_2^p|x|^{np} = M|x|^{np}$

Exempel:

- Maclaurinutveckla $\frac{1}{\cos x}$ med restterm av ordning 6

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6) = 1-t$$

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+O(t^3)$$

$$t = 1-\cos x = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^6) = \frac{x^2}{2}+O(x^4) = O(x^2)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+O(x^6)+\frac{x^4}{4}+O(x^6)+O(x^6)$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+O(x^6)$$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)\right]\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+O(x^6)\right]$

$$= \ldots$$

$$= \underline{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+O(x^7)}$$

$$\bullet \quad \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2} = \left[\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}t + O(t^2)\right]$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) - 1}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} - 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)}{2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + O(x^4)\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)}{\frac{1}{4}x^4 + O(x^4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + O(x^2)}{\frac{1}{4} + O(x^2)} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \quad \text{då} \quad x \longrightarrow 0$$

Läsvecka 3

12/10/97

$\bullet$ Undersök $f(x) = \dfrac{\sin(\sin(x)) - \arctan x}{x^5}$ då $x \longrightarrow 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$= x + O(x^3)$$

$$= O(x)$$

$$\sin(\sin(x)) = \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + O(x^7)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}x^3\left[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right]^3 + \frac{1}{120}x^5\left[1 + O(x^2)\right]^5 + O(x^7)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}x^3\left[1 - 3\frac{x^2}{6} + O(x^4)\right] + \frac{1}{120}x^5\left[1 + O(x^2)\right] + O(x^7)$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + O(x^7)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7)$$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right)x^5 + O(x^7)}{x^5} = -\frac{1}{10} + O(x^2) \longrightarrow -\frac{1}{10} \quad \text{då} \quad x \to 0$$

• $f(x) = (x+1)^2 - e^x - (x+1)\ln(x+1)$

Vi har $f'(0)=0$, $f''(0)=0$

Är $x=0$ en extrempunkt ?

$$f(x) = x^2+2x+1-\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right]-(x+1)\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+O(x^5)\right]$$

$$= x^2+2x+1-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{24}-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+O(x^5)$$

$$=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+O(x^5)$$

$$=-\frac{1}{8}x^4+O(x^5)$$

I närheten av $x=0$ är $f(x) = -\frac{x^4}{8}\underbrace{\left[1+O(x)\right]}_{>0 \text{ för } x \text{ nära } 0}$

$f(x) \leq 0$ för x nära 0 , likhet bara då $x=0$.

Alltså: <u>strängt lokalt maximum</u>

SATS 16.9 Cauchys medelvärdessats

Antag att
- f och g är kontinuerliga på $[a,b]$
- f och g är deriverbara på $]a,b[$
- $g'(x) \neq 0$ på $]a,b[$

Då finns (minst) ett ξ i $]a,b[$ så att $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

<u>Bevis:</u>

Bilda hjälpfunktionen $\varphi(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$

$\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = \varphi(b)$

φ uppfyller förutsättningarna i (den vanliga) medelvärdessatsen.

Då finns ξ i $]a,b[$ så att $0 = \varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\xi)=0$

Vidare är $g(b)-g(a) = (b-a)g'(\xi_1) \neq 0$ eftersom $g'(x) \neq 0$ i $]a,b[$

Detta ger påståendet.

SATS 16.8 L'Hospitals regel

Antag 1). $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to x_0$ eller $g(x) \to +\infty$ eller $-\infty$ då $x \to x_0$

2). $f'(x)$ och $g'(x)$ existerar (åtminstone) då $x \neq x_0$ i en omgivning av x_0, och $g'(x)$ har konstant tecken på vardera sidan av x_0

3). $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

Då är

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Motsvarande gäller då $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Bevis:

Betrakta $x > x_0$, x nära x_0

Definiera (om nödvändigt) $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Då blir f och g konstanta på $[x_0, x]$

Enligt Cauchys medelvärdessats finns ξ i $]x_0, x[$ så att $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$x \to x_0^+$ medför $\xi \to x_0^+$, och enligt antagandet 3) har högerledet ett gränsvärde.

Alltså är $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Motsvarande då $x \to x_0^-$

Exempel

1642) b)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4\cos 4x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{4\cos \pi}$$

$$= \frac{2}{-4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$18)\ d)\quad \lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{e^{x^2}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{\frac{1}{x}e^{x^2}\cdot 2x - \frac{1}{x^2}e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

TALFÖLJDER OCH LINJÄRA DIFFERENSEKVATIONER

17.1 Talföljder

Definition:

En talföljd a_n, $n = p, p+1 \ldots$ kan ses som en funktion definierad på heltal: $f(n) = a_n$, $n \geq p$

Gränsvärden: Som för funktioner

exempel: Vi vet att $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-ax} = 0$ för $p \geq 0$, $a > 0$

Härav fås speciellt om $|k| < 1$ att $|n^p k^n| = n^p |k|^n = n^p e^{n \ln|k|} \to 0$ då $n \to \infty$
(ty $\ln|k| = -a < 0$)

Läsvecka 3
13/11/97

17.2 Differensekvationer: terminologi och inledande exempel

Exempel 9

En person sätter vid början av varje år in k kronor på ett bankkonto med r% årlig ränta. På den upplupna räntan dras vid årets slut 30% skatt.
Vilket kapital har han efter den n:te insättningen?

Kapital y_n vid början av år n.
$y_1 = k$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{r}{100} y_n - \frac{3}{10} \cdot \frac{r}{100} y_n + k$$
$$= \left(1 + \frac{7r}{1000}\right) y_n + k \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

Rekurrensekvation, eller differensekvation.

17.3 Linjära differensekvationer av första ordningen

$y_{n+1} + a y_n = d_n$
$n = 0, 1, 2, \ldots$
y_0 givet

$y_{n+1} = -a y_n + d_n$
$y_1 = -a y_0 + d_0$
$y_2 = -a y_1 + d_1 = -a(-a y_0 + d_0) + d_1 = (-a)^2 y_0 - a d_0 + d_1$
$y_3 = -a y_2 + d_2 = (-a)^3 y_0 + (-a)^2 d_0 + (-a) d_1 + d_2$

Allmänt:
$$\boxed{y_n = (-a)^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k}$$

17.4 Linjära differensekvationer av andra ordningen

$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = d_n \; (*)$, $n \geq 0$ (a, b reella konstanter)

1) Om $y_n^{(1)}$ och $y_n^{(2)}$ är lösningar till den homogena ekvationen (med $d_n = 0$), så är $\alpha y_n^{(1)} + \beta y_n^{(2)}$ också en lösning för godtyckliga konstanter α och β. (Superpositionsprincipen)

2) Om $y_n^{(h)}$ är allmänna lösningen till homogena ekvationen, och om $y_n^{(p)}$ är en lösning till $(*)$ så är $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)}$ allmänna lösningen till $(*)$

17.5 Linjära, homogena differensekvationer

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0 \qquad (**)$$

Antag $b \neq 0$ (annars fås en första ordningens ekvation för $z_n = y_{n+1}$)
Sök lösningar av formen $y_n = r^n$ $(r \neq 0)$

$$\begin{aligned} y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n &= r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n \\ &= r^n(r^2 + ar + b) \end{aligned}$$

om och endast om r satisfierar ekvationen $\boxed{r^2 + ar + b = 0}$, som kallas karakteristiska ekvationen.

SATS

Låt r_1 och r_2 vara rötterna till karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$
Då gäller

1) $r_1 \neq r_2$

Den allmänna lösningen till $(**)$ är $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$

2) $r_1 = r_2$

Den allmänna lösningen till $(**)$ är $y_n = (C_1 + C_2 n) r_1^n$

Bevis: 1) Klart att $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ alltid är en lösning.
Ger detta alla lösningar?
Låt y_n vara en godtycklig lösning. Bestäm C_1 och C_2 så att lösningarna y_n och $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ överensstämmer för $n=0$ och $n=1$. Då måste de överensstämma för alla $n \geq 0$.

Vi vill ha:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 & (n=0) \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 & (n=1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = y_0 - C_1 \\ r_1 C_1 + r_2 (y_0 - C_1) = y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = y_0 - C_1 \\ (r_1 - r_2) C_1 = y_1 - r_2 y_0 \end{cases}$$

Detta kan lösas då $r_1 - r_2 \neq 0$
Alltså är $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ för alla $n \geq 0$

2) r_1^n är en lösning

$y_n = n r_1^n$ är också en lösning, ty insättning ger

$$
\begin{aligned}
y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n &= (n+2) r_1^{n+2} + a(n+1) r_1^{n+1} + b n r_1^n \\
&= r_1^n \Big[\underbrace{n(r_1^2 + a r_1 + b)}_{=0} + 2 r_1^2 + a r_1 \Big] \\
&= r_1^n \cdot r_1 (2 r_1 + a)
\end{aligned}
$$

Nu är
$$
\begin{aligned}
r^2 + a r + b &= (r - r_1)^2 \\
&= r^2 - 2 r r_1 + r_1^2
\end{aligned}
$$

Alltså : $-2 r_1 = a$, $r_1^2 = b$

$2 r_1 + a = 0$, varför $n r_1^n$ är en lösning. Då är också $C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ en lösning för godtyckliga konstanter C_1 och C_2

Fås varje lösning på detta sätt ?

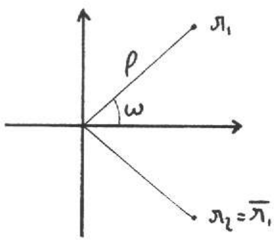
Låt y_n vara en godtycklig lösning. Välj (om möjligt) C_1 och C_2 så att y_n och $C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ överensstämmer för $n=0$ och $n=1$:

$$
\begin{cases} C_1 = y_0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_1 = y_1 \end{cases} \qquad \text{Lösbart ty } r_1 \neq 0
$$

Alltså är $y_n = (C_1 + C_2 n) r_1^n$ för alla $n \geq 0$

Reell form:

Om r_1 och r_2 är icke-reella kan de skrivas $\begin{matrix} r_1 = \rho e^{i\omega} \\ r_2 = \rho e^{-i\omega} \end{matrix}$ $(0 < \omega \leq \pi)$.



$$
\begin{aligned}
y_n &= C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \\
&= C_1 (\rho e^{i\omega})^n + C_2 (\rho e^{-i\omega})^n \\
&= \rho^n (C_1 e^{i\omega n} + C_2 e^{-i\omega n}) \\
&= \rho^n [C_1 (\cos \omega n + i \sin \omega n) + C_2 (\cos \omega n - i \sin \omega n)] \\
&= \underline{\rho^n (A \cos \omega n + B \sin \omega n)}
\end{aligned}
$$

där $\begin{cases} A = C_1 + C_2 \\ B = i(C_1 + C_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}(A - iB) \\ C_2 = \frac{1}{2}(A + iB) \end{cases}$

A och B godtyckliga konstanter
Reella A och B ger reella lösningar

Exempel 19

Fibonaccis talföljd: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$

karakteristisk ekvation: $r^2 - r_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$
$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

$$F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$
$$= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_0 = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$F_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 + \sqrt{5}(C_1 - C_2) = 2$$
$$\Rightarrow 2C_1\sqrt{5} = 2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

17.6 Linjära, inhomogena differensekvationer

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = d_n$$

Om d_n är ett polynom i n, ansätt en partikulärlösning $y_n^{(p)} = n^m$ (polynom av samma grad som d_n) m = multiplicitet hos (1) som rot till karakteristiska ekvationen

Läsvecka 4

17/11/97

Exempel 1717 e)

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$$

Karakteristisk ekvation: $r^2 - 2r + 4 = 0 \iff r = \pm i\sqrt{3}$

$\iff r = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

$$\underline{y_n^{(h)} = 2^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

Betrakta hjälpekvationen $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n = 2^n e^{i\frac{\pi}{3}n} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$

Om u_n är en lösning, så är $y_n = \operatorname{Im} u_n$ en lösning till ursprungliga ekvationen.

Då $r_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ är en rot till karakteristiska ekvationen ansätts en partikulärlösning:

$$u_n^{(p)} = n a r_1^n$$

$$\begin{aligned}
u_{n+2}^{(p)} - 2u_{n+1}^{(p)} + 4u_n^{(p)} &= a(n+2)r_1^{(n+2)} - 2a(n+1)r_1^{(n+1)} + 4anr_1 \\
&= ar_1^n\left[(n+2)r_1^2 - 2(n+1)r_1 + 4n\right] \\
&= ar_1^n\left[\underbrace{n(r_1^2 - 2r_1 + 4)}_{=0} + 2r_1^2 - 2r_1\right] \\
&= 2r_1(r_1 - 1)ar_1^n \\
&= r_1^n
\end{aligned}$$

koefficientidentifiering ger: $2r_1(r_1 - 1)a = 1 \iff 2(1 + i\sqrt{3})i\sqrt{3}\,a = 1$

$$\iff 2\sqrt{3}(-\sqrt{3} + i)a = 1$$

$$\iff a = \frac{1}{2\sqrt{3}(-\sqrt{3}+i)} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$\iff a = \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}(-1-3)}$$

$$\iff a = -\frac{1}{8\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i)$$

$$\begin{aligned}
u_n^{(p)} &= -\frac{1}{8\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i)\,n\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n \\
&= -\frac{1}{8\sqrt{3}}n \cdot 2^n(\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$y_n^{(p)} = \operatorname{Im} u_n^{(p)} = \underline{-\frac{1}{8\sqrt{3}}n2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

$$\underline{y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)}}$$

NUMERISKA SERIER

18.1 Definition

En <u>serie</u> är en formell oändlig summa $a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

eller allmännare: $a_p + a_{p+1} + \cdots = \sum_{k=p}^{\infty} a_k$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kallas den n:te <u>delsumman</u>

Om gränsvärdet $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ existerar så kallas serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>konvergent</u> med summan S.

I annat fall är serien divergent.

För en konvergent serie skriver vi $\underline{S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$

<u>Exempel:</u>

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

  Delsummorna S_n är 1 eller 0 beroende på om n är udda eller jämnt.
  Serien är divergent.

- $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$
  $$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ då } n \to \infty$$

  Serien är konvergent, $\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$

- Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ (c konstant)

  $$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} c^k = 1 + c + \cdots + c^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-c^n}{1-c} & \text{om } c \neq 0 \\ n & \text{om } c = 0 \end{cases}$$

  Om $|c| < 1$ gäller att $c^n \to 0$ då $n \to \infty$; serien konvergerar
  $|c| > 1$ gäller att $|c|^n \to \infty$ då $n \to \infty$; serien divergerar
  $c = -1$ är serien divergent enligt tidigare exempel

Alltså är $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ konvergent om och endast om $\underline{|c|<1}$

Summan är då $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}}$

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta så är $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ och $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ konvergenta med summorna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ respektive $c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

SATS 18.1

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$

<u>Bevis:</u>

$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n$$

$$\left.\begin{array}{l} S_n \to S \\ S_{n-1} \to S \end{array}\right\} \text{ då } n \to \infty$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

OBS: Omvändningen inte sann!

<u>Exempel:</u>

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \text{ då } k \to \infty$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$> n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty \text{ då } n \to \infty$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ divergerar

Låt M vara en icke tom och <u>uppåt begränsad</u> mängd av reella tal, dvs det finns ett tal B så att $x \leq B$ för alla $x \in M$. B kallas en <u>övre begränsning</u> för M.

Följande fundamentala egenskap för de reella talen gäller då:

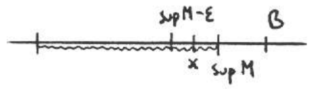
Det finns en övre begränsning

Detta kallas för supremum av M, skrivet $\sup M$

$\sup M$ har alltså egenskaperna

i) $x \leq \sup M$ för alla $x \in M$

ii) För varje $\varepsilon > 0$ finns något $x \in M$ så att $x > \sup M - \varepsilon$



Läsvecka 4
19/11/97

<u>SATS 18.2</u>

En växande och uppåt begränsad talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent

<u>Bevis:</u> Låt $M = \{a_n : n \geq 1\}$ och $A = \sup M$

För varje $\varepsilon > 0$ finns ett N så att $a_N > A - \varepsilon$

För $n \geq N$ är $A - \varepsilon < a_n \leq A$, varför (per definition) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

18.3 Positiva serier

En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kallas positiv om alla <u>$a_k \geq 0$</u>

<u>SATS 18.4</u>

En positiv serie är konvergent om och endast om dess delsummor $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ är uppåt begränsade

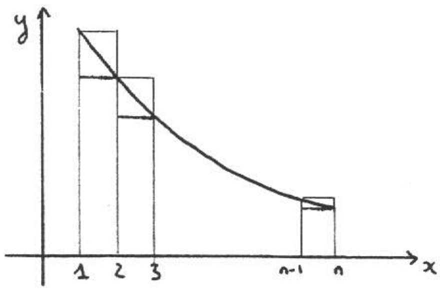
<u>Bevis:</u> $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ är växande ty $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$

Antag $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ begränsad. Enligt sats 18.2 existerar $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Omvändningen trivial (en konvergent följd är alltid begränsad)

Integraluppskattning

Antag $f(x)$ är positiv (kontinuerlig) och avtagande på $[1,\infty[$



$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots + f(n)\cdot 1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

$$\boxed{\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx} \qquad (*)$$

SATS 18.6 (Integralkriteriet)

Antag $f(x)$ är positiv och avtagande på $[1,\infty[$. Då är $\sum_1^\infty f(k)$ konvergent om och endast om $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent

Bevis: 1) Antag $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent

Då är enligt $(*)$ $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$

varför $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent enligt sats 18.4

2) Antag $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergent. Då gäller $\int_1^{n+1} f(x)\,dx \to \infty$ då $n \to \infty$.

Enligt $(*)$ gäller $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \to \infty$ då $n \to \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ divergerar.

SATS 18.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \text{är konvergent om } p > 1 \text{, divergent om } p \leq 1 \quad (p > 0)$$

Bevis: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ är konvergent om $p > 1$ och divergent om $p \leq 1$.

Exempel:

Den harmoniska serien $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ är divergent

Enligt integraluppskattningen är $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_1^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx$

$$\Leftrightarrow \ln(n+1) < \sum_1^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n$$

18.4 Ytterligare några konvergenskriterier för positiva serier

SATS 18. Jämförelsekriteriet

Antag $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k. Då gäller

(1) $\sum_1^{\infty} b_k$ konvergerar $\Rightarrow$ $\sum_1^{\infty} a_k$ konvergerar

(2) $\sum_1^{\infty} a_k$ divergerar $\Rightarrow$ $\sum_1^{\infty}$ divergerar

Bevis:

Sätt $S_n = \sum_1^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_1^{n} b_k$ så att $S_n \leq \sigma_n$ för alla n.

(1): $\sum_1^{\infty} b_k$ konvergerar $\Rightarrow \{\sigma_n\}_1^{\infty}$ är uppåt begränsad. (Sats 18.4), varför $\{S_n\}_1^{\infty}$ är uppåt begränsad och $\sum_1^{\infty} a_k$ är konvergent

(2): Om $\sum_1^{\infty} a_k$ är divergent gäller $S_n \to \infty$, varför $\sigma_n \to \infty$ och $\sum_1^{\infty} b_k$ är divergent.

Exempel

- $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\arctan k}{1+k^2}$

$$a_k = \frac{\arctan k}{1+k^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{1+k^2} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{k^2} = b_k$$

$\displaystyle\sum_1^\infty b_k = \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$ är konvergent (sats 18.7)

- $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\ln(1+k^2)}{k\sqrt{k}}$

$$a_k = \frac{\ln(1+k^2)}{k\sqrt{k}} < \frac{\ln(2k^2)}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln 2}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\ln k}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Vi vet att $\frac{\ln x}{x^p} \to 0$ då $x \to \infty$ för varje $p > 0$

$\frac{\ln k}{k^{\frac{1}{4}}} \leq C$ för någon konstant C

$\Leftrightarrow \ln k \leq C k^{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln k}{k^{\frac{3}{2}}} < C \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}$

$$a_k < \frac{\ln 2}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{2C}{k^{\frac{5}{4}}} = b_k$$

$\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ konvergerar och $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}$ konvergerar, $\displaystyle\sum_1^\infty b_k$ konvergerar

Alltså är $\displaystyle\sum_1^\infty a_k$ konvergent.

Uppskattning av $n!$

$$\ln n! = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_1^n \ln k$$

Integraluppskattning med $f(x) = \ln x$ ger:

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,dx > \sum_1^n f(k) > f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\int_1^n \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^n - \int_1^n x\frac{1}{x}\,dx = n\ln n - n + 1 = 1 + n(\ln n - \ln e) = 1 + \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$1 + \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n < \ln n! < \ln n + 1 + \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

SATS 18.3 Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n), \quad \text{där } \varepsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

Läsvecka 4
20/11/97

SATS 18.9

Om $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0$ så är de positiva serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Bevis. För stora k är $\frac{A}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3A}{2}$

Exempel:

$$\sum_1^{\infty} a_k = \sum_1^{\infty} k \arctan\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sin\frac{k\pi}{k+1}$$

$$\sin\frac{k\pi}{k+1} = \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{k+1}\right) = \sin\frac{\pi}{k+1} = \frac{\pi}{k+1} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$a_k = \frac{\pi\sqrt{k}}{k+1} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$ Jämför med $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar

$$\frac{a_k}{b_k} - \frac{\pi k}{k+1} + O\left(\frac{1}{k}\right) \to \pi > 0 \text{ då } k \to \infty$$ varför $\sum_1^{\infty}$ divergerar

SATS 18.10 Rotkriteriet

Antag $a_k \geq 0$ och $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

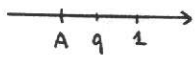
Om $A < 1$ är $\sum\limits_1^\infty a_k$ konvergent

Om $A > 1$ är $\sum\limits_1^\infty a_k$ divergent

Bevis:

Antag $A < 1$

Välj q mellan A och 1, t.ex $q = \frac{A+1}{2}$



Då finns m så att $\sqrt[k]{a_k} < q$ för $k \geq m$.

För $k \geq m$ är $a_k < q^k$, och eftersom $\sum\limits_1^\infty q^k$ är konvergent (geometrisk serie),

är enligt jämförelsekriteriet $\sum\limits_1^\infty a_k$ konvergent.

SATS 18.11 kvotkriteriet

Antag $a_k > 0$ och $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$

Om $A < 1$ är $\sum\limits_1^\infty a_k$ konvergent

Om $A > 1$ är $\sum\limits_1^\infty a_k$ divergent

Anmärkning:

Om $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$ så är också $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

Exempel:

$$a_k = \begin{cases} 2^{-k} & \text{om } k \text{ jämnt} \\ 2\cdot 2^{-k} & \text{om } k \text{ udda} \end{cases}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} 1 & \text{om } k \text{ jämnt} \\ \frac{1}{4} & \text{om } k \text{ udda} \end{cases} \quad , \text{ Saknar gränsvärde.}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om } k \text{ jämnt} \\ \sqrt[k]{2} \cdot \frac{1}{2} & \text{om } k \text{ udda} \end{cases} \qquad \left(\sqrt[k]{2} \to 1 \text{ då } k \to \infty \right)$$

$\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2}$, serien konvergerar.

18.5 Serier med godtyckliga termer

Definition

Om $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent kallas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent

Om $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent med $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent, kallas den betingat konvergent

SATS 18.12

En absolutkonvergent serie är konvergent

Bevis:

1) a_k reella

$$a_k = \underbrace{(a_k + |a_k|)}_{\geq 0} - |a_k|$$

Jämförelsekriteriet ger konvergens

2) $a_k = b_k + ic_k$

$|b_k| \leq |a_k|$, $|c_k| \leq |a_k|$

Jämförelsekriteriet och 1) ger att $\sum\limits_{1}^{\infty} b_k$ och $\sum\limits_{1}^{\infty} c_k$ är konvergenta, och därmed $\sum\limits_{1}^{\infty} (b_k + ic_k)$ konvergent.

Definition

Om $a_k > 0$ kallas serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ alternerande.

SATS 18.13 Leibniz konvergenskriterium

Antag $a_k > 0$ och a_k avtar mot 0 då $k \to \infty$.

Då är $\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konvergent och vi har en feluppskattning

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum_1^{n} (-1)^{k-1} a_k + r_n$$

$$= S_n + r_n$$

där $r_n = (-1)^n \delta_n$, $0 \leq \delta_n \leq a_{n+1}$

Bevis:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}$$

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \leq a_1$$

Alltså: $\{S_n\}_1^{\infty}$ är växande och begränsad

$S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ existerar.

$$S_{2n+1} = \underset{\to S}{S_{2n}} + \underset{\to 0}{a_{2n+1}} \to S \text{ då } n \to \infty$$

Alltså är $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

$$= (-1)^n a_{n+1} + \cdots$$

$$= (-1)^n \delta_n \quad \text{där } \delta_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots$$

Detta visar att $0 \leq \delta_n \leq a_{n+1}$

POTENSSERIER

19.1 Taylorserier och Maclaurinserier

Om $f(x)$ har derivator av alla ordningar är $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$.

Om $R_{n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$ fås

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

SATS 19.1

- $f(x) = e^x$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \to 0 \text{ då } n \to \infty \quad \text{ty} \quad \frac{|x|^n}{n!} < \frac{|x|^n}{e\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e}\left(\frac{e|x|}{n}\right)^n < \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

om $n > 2e|x|$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{för alla } x$$

- Analogt för $\sin x$ och $\cos x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{för alla } x$$

Läsvecka 5
24/11/97

19.2 Potensserier och deras konvergens

Definition

En potensserie är av formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ där a_k, z, z_0 i allmänhet är komplexa.
Vi kan ha $z=0$.

SATS 19.3

Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ är konvergent för något $z_1 \neq 0$ så är serien konvergent för alla z med $|z| < |z_1|$

__Bevis:__

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ konvergerar $\Rightarrow |a_k z_1|^k \leq 1$ för stora k $(k \geq N)$

$\Rightarrow |a_k| \leq \dfrac{1}{|z_1|^k}$

Tag z med $|z| < |z_1|$

För $k \geq N$ är $|a_k z^k| = |a_k||z|^k \leq \dfrac{|z|^k}{|z_1|^k} = \left(\dfrac{|z|}{|z_1|}\right)^k = q^k$, $0 \leq q < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergerar $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k z^k|$ konvergerar

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ är absolut-konvergent , alltså konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$.

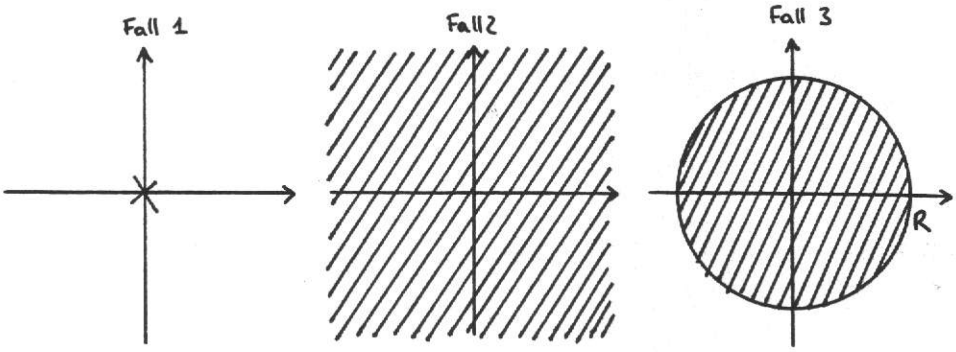
SATS 19.2

För konvergensen av en given potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gäller något av följande:

1) Serien konvergerar bara för $z = 0$

2) Serien konvergerar för alla z

3) Det finns ett $R > 0$ så att serien konvergerar för $|z| < R$ och divergerar för $|z| > R$. R kallas konvergensradie.



__Bevis__

Sätt $M = \{ r : \sum_{k=0}^{\infty}$ konvergerar för något z med $|z| = r \}$

$M \neq \emptyset$ ty $0 \in M$

Om $r \in M$ $(r>0)$ konvergerar serien för alla z med $|z| < r$ (Sats 19.3)

- Om M ej är begränsad, finns för varje r_1 ett $r > r_1$, $r \in M$, och då konvergerar serien för alla z med $|z| < r$, speciellt för $|z| \leq r_1$.
  Då r_1 är godtyckligt, gäller 2).

- Om M är begränsad, sätt $R = \sup M$.
  Om $R = 0$ gäller 1).
  Antag $R > 0$
  Om $|z| > R$, gäller att $|z| \notin M$ och serien är divergent.
  Om $|z| < R$, finns $r \in M$ med $|z| < r \leq R$ och då är serien konvergent för z

<u>Anmärkning:</u> I fall 1) är $R=0$
I fall 2) är $R = \infty$

<u>Definition:</u>

Låt $\{a_k\}_1^\infty$ vara en godtycklig begränsad talföljd.

Sätt $A_n = \sup\limits_{k \geq n} a_k$

Då är A_n avtagande, begränsad, och $\lim\limits_{k\to\infty} A_n$ existerar.

Detta gränsvärde kallas <u>limes superior</u> och betecknas $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k$

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq N} a_k$$

Om $\{a_k\}_1^\infty$ inte är begränsad uppåt sätts $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$

För varje $\varepsilon > 0$ gäller för $A = \limsup\limits_{k\to\infty} a_k < \infty$

(1) $a_k < A + \varepsilon$ för alla k utom ändligt många $(k \geq N)$

(2) $a_k > A - \varepsilon$ för oändligt många k.

<u>Exempel:</u>

$$\limsup_{k\to\infty} (-1)^k = 1$$

Om $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ existerar så är $\limsup a_k = \lim a_k$

SATS 13.4 Rotformeln för konvergensradien

Potensserien $\sum_{0}^{\infty} a_k z^k$ har konvergensradien $R = \frac{1}{H}$ där $H = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

(om $H=0$ är $R=\infty$, om $H=\infty$ är $R=0$)

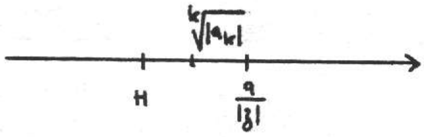
Bevis

Betrakta $0 < H < \infty$

• Antag $|z| < \frac{1}{H} \Leftrightarrow |z| H < 1$. Välj q så att $|z| H < q < 1$.

Serien konvergerar för $z=0$

Antag $z \neq 0$: $H < \frac{q}{|z|}$

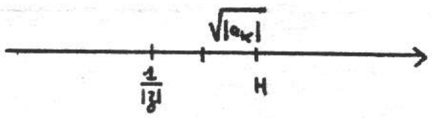


Då finns N så att $\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{q}{|z|}$, $k \geq N$

$$\Leftrightarrow |a_k||z|^k < q^k, \quad k \geq N$$

$0 \leq q < 1$, varför $\sum_{0}^{\infty} a_k z^k$ är absolut-konvergent

• Antag $|z| > \frac{1}{H} \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} < H$



Då är $\sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|z|}$ för oändligt många k

$|a_k z^k| > 1$ för oändligt många k

Allmänna termen i $\sum_{0}^{\infty} a_k z^k$ går ej mot 0, serien divergerar.

Exempel:

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ (Maclaurinserien för $\ln(1+x)$)

$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$ då $k \to \infty$

$R = \frac{1}{1} = 1$

$x=1$: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är konvergent enligt Leibniz kriterium

$x=-1$: $-\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent konvergent för $-1 < x \leq 1$

Läsvecka 5
26/11/97

SATS 19.5 Kvotformeln för konvergensradien

Om $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to K$ då $k \to \infty$, så är konvergensradien $R = \frac{1}{K}$

Bevis:

Använd kvotkriteriet på serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ där $b_k = |a_k||z|^k$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{|a_{k+1}||z|^{k+1}}{|a_k||z|^k} = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z| \to K|z|$$

Om $K|z| < 1$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ (absolut)konvergent

Om $K|z| > 1$ så går inte $a_k z^k$ mot 0, dvs. $\sum_{k=0} a_k z^k$ är divergent

Alltså är $R = \frac{1}{K}$

Exempel:

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ (Maclaurinserien för $\arctan x$)

Serien är $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ där $\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ a_{2k} = 0 \end{cases}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & n \text{ udda } (n = 2k+1) \\ 0, & n \text{ jämnt } (n = 2k) \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existerar inte, men $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alltså är $R = \frac{1}{1} = 1$

Alternativt:
Sätt $t = x^2$. Serien blir $x\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ där $b_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$

$\sqrt[k]{|b_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{2k+1}} \to \frac{1}{1} = 1$ då $k \to \infty$, eller $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{2k+1}{2k+3} \to 1$ då $k \to \infty$

Serien konvergerar för $|t| < 1$, divergerar för $|t| > 1$
Ursprungliga serien konvergerar då $x^2 < 1$, dvs $|x| < 1$, divergerar då $x^2 > 1$, dvs $|x| > 1$

Alltså är $R=1$ för ursprungliga serien.

För $x=\pm 1$ fås serien $\pm\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ som är konvergent enligt Leibniz kriterium

Alltså konvergerar den ursprungliga serien för $-1\leq x\leq 1$.

- $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{där} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{om } k=n^2\text{, } n \text{ heltal} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sqrt[k]{k}}} & , k=n^2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = 1 \quad , \quad R=1$$

$x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ är divergent

$x=-1$: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ är konvergent enligt Leibniz kriterium

Serien konvergerar för $-1\leq x<1$

- 1902 h/

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad a_k = \frac{(k!)^2}{k^{2k}} = \left(\frac{k!}{k^k}\right)^2$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}\right)^2$$

Tidigare visat: $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{e}\,\frac{n}{e} < \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e}\,\frac{n}{e}$

$\sqrt[n]{e}\to 1$ och $\sqrt[n]{n}\to 1$ medför $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{e^2} \quad , \quad R=e^2$$

Alternativt:
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left[\frac{(k+1)!\,k^k}{(k+1)^k\,k!}\right]^2$$
$$= \left[\frac{(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k}\right]^2$$
$$= \left[\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}\right]^2$$
$$= \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right]^2 \to \frac{1}{e^2} \text{ då } k\to\infty$$

$x = \pm e^2$ ger serien $\sum_{k=1}^{\infty}(\pm 1)^k\left(\frac{k!}{k^k}\right)^2 e^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}(\pm 1)^k\left[k!\left(\frac{e}{k}\right)^k\right]^2$

$k!\left(\frac{e}{k}\right)^k > e$, så alla termer går inte mot 0. Divergens.

Serien konvergerar för $\underline{-e^2 < x < e^2}$.

19.3 Derivation och integration av potensserier

SATS 19.6

Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien $R>0$ och summan $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

För $-R < x < R$ är $f(x)$ kontinuerlig och deriverbar, och det gäller:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Bevis senare.

Exempel

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ för $-1 < x < 1$ (geometrisk serie)

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{för } -1 < x < 1$$

- $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = f(x) \quad \text{för } |x| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1$$

- $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad b_k = \frac{1}{(2k+1)!}$$

Betrakta serien $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \to 0 \quad \text{då } k \to \infty$$

Alltså är $\sum_0^{\infty} b_k t^k$ konvergent för alla t.

Serien för $f(x)$ konvergerar för alla x $\quad (R = \infty)$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = [k \to k+1] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = f(x)$$

Alltså: $f''(x) - f(x) = 0 \iff f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Men $f(0) = 0$ och $f'(0) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\underline{f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x}$$

Läsvecka 5
27/11/97

19.4 Lösning av differentialekvationer med potensserier

Exempel:

Lös ekvationen $(1-x^2)y'' + xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ i form av en potensserie.

Ansätt en lösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Om konvergensradien är > 0 fås $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = [n \to n+2] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Identifiera koefficienter för x^n

$n=0$: $2\cdot 1\cdot a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$

$n=1$: $3\cdot 2\cdot a_3 + a_1 - a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$

$n \geq 2$: $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + na_n - a_n = 0 \Leftrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2-n-n+1)a_n$

$\Leftrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2-2n+1)a_n$

$\Leftrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n-1)^2 a_n$

$\Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+1)}a_n$

$a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow a_7 = 0$ o.s.v.

$$a_4 = \frac{1^2}{3\cdot 4}a_2 = \frac{1^2}{2\cdot 3\cdot 4}a_0$$

$$a_6 = \frac{3^2}{5\cdot 6}a_4 = \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a_0$$

$$a_8 = \frac{5^2}{7\cdot 8}a_6 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}a_0$$

Allmänt: $a_{2k} = \frac{[1\cdot 3\cdot \cdots (2k-3)]^2}{(2k)!}a_0 = \frac{[(2k-3)!!]^2}{2k!}a_0$

[**Definition:**

$(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2k-1)$

$(2k)!! = 2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2k$

(semi-fakultet)]

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2}x^2 + a_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(2k-3)!!]^2}{(2k)!}x^{2k}$$

Sätt $t = x^2$, $b_k = a_{2k}$, och betrakta serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k t^k \quad , \quad \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{(2k-1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\left(2-\frac{1}{k}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{2}{k}\right)} \to \frac{2^2}{2\cdot 2} = 1 \text{ då } k \to \infty$$

Alltså har serien $\sum_{k=2}^{\infty} b_k t^k$ konvergensradien $R = 1$

och $\sum_{k=2}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ är konvergent för $x^2 < 1$, d.v.s för $|x| < 1$

$y(0) = a_0 = 1$
$y'(0) = a_1 = 2$

$$y = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[(2k-3)!!]^2}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{för } |x| < 1$$

Anmärkning: $y = 2x + \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$

19.5 Funktionsserier och funktionsföljder

Definition

$f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ funktioner definieras på ett intervall I.
Om $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existerar för varje $x \in I$ så sägs $f_n(x)$ konvergera punktvis mot $f(x)$.

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är en funktionsserie

Den konvergerar punktvis om $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konvergerar punktvis mot $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

- Om $u_k(x)$ är deriverbara är $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x)$ för varje n.
Men är $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$, d.v.s $\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$?

- Om $u_k(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$, så är $f_n(x)$ kontinuerlig och

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

Men är $f(x)$ kontinuerlig , och är $\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$?

Svaren är i regel <u>Nej</u>.

<u>Exempel</u>

- $f_n(x) = x^n$ är kontinuerlig på $[0,1]$

  $f_n(x)$ konvergerar punktvis mot $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

  $f(x)$ är inte kontinuerlig på $[0,1]$

- $f_n(x) = n^2(1-x)x^n$ på $[0,1]$.

  $f_n(1) = 0$ för alla n
  Om $0 \le x < 1$ gäller att $n^2 x^n \to 0$ då $n \to \infty$
  $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

  $$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right) dx$$
  $$= n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
  $$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1 \text{ då } n \to \infty$$

  Alltså: $1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$

- $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$

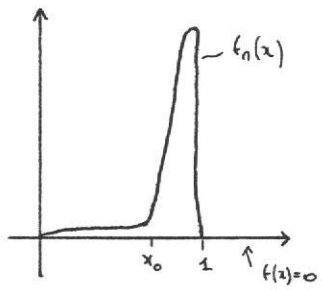
  $f_n(x) \to 0 = f(x)$ då $n \to \infty$
  $f'(x) = 0$, men $f_n'(x) = \cos nx$ går inte mot $f'(x)$

- $f_n(x) = n^2(1-x)x^n = n^2(x^n - x^{n+1})$

  $f_n'(x) = n^2(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = n^2 x^{n-1}[n - (n+1)x]$

  $f_n(x)$ har maximum då $x = \frac{n}{n+1}$

  $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^2\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \approx \frac{n}{e}$ för stora n



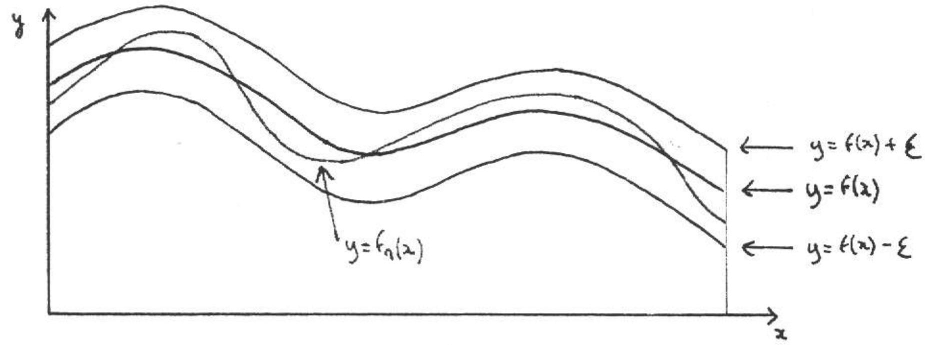
"Avståndet" mellan f_n och f på $[0,1]$ är $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \to \infty$

Läsvecka 6
01/12/97

Appendix A : Likformig konvergens

Definition

f_n går mot f likformigt på I då $n\to\infty$, om $\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| \to 0$ då $n\to\infty$ d.v.s. om det till varje $\varepsilon>0$ finns ett $N=N_\varepsilon$ så att $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ för alla $x\in I$ då $n>N_\varepsilon$



SATS 19.7

Antag att funktionerna f_n är kontinuerliga på I och att $f_n\to f$ likformigt på I. Då är f kontinuerlig på I.

SATS 19.8

Om funktionerna $u_k(x)$ är kontinuerliga på I, och om $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är likformigt konvergent på I, så är summan $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ kontinuerlig på I.

Bevis:

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ är kontinuerlig och $S_n(x) \to S(x)$ likformigt på I. Sats 19.7 ger påståendet.

SATS 19.9 Weierstrass majorantsats.

Om $|u_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in I$, $k \geq 1$, och om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så är $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent.

Bevis:

Enligt jämförelsekriteriet är $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ (absolut) konvergent för varje $x \in I$, så summan $S(x)$ existerar.

För varje $\varepsilon > 0$ finns N så att $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ för $n \geq N$.

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)|$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \underline{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon} \quad \text{för alla } x \in I,\ n \geq N$$

Alltså: $\underline{S_n(x) \to S(x) \text{ likformigt}}$

Exempel:

Betrakta $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 x}$ för $x > 0$

För varje $a > 0$ gäller för $x \geq a$ att $e^{-k^2 x} \leq e^{-k^2 a} \leq e^{-ka} = a_k$ och eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-a})^k$ är konvergent (geometrisk serie, $e^{-a} < 1$) följer att $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 x}$ är likformigt konvergent på $[a, \infty[$

Då $a > 0$ är godtycklig följer att $f(x)$ är kontinuerlig för $x > 0$.

Appendix B. Gränsövergång under integraltecknet.

SATS 19.10

Om $f_n(x)$ är kontinuerliga och om $f_n(x) \to f(x)$ likformigt på ett slutet begränsat intervall $[a,b]$ är

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bevis:

$f(x)$ blir kontinuerlig (Sats 19.7), så $\int_a^b f(x)dx$ existerar.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$\leq (b-a) \max_{a\leq x\leq b} |f(x) - f_n(x)| \to 0 \text{ då } n\to\infty$$ enligt definition på likformig konvergens.

Alltså: $\underline{\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då } n\to\infty}$

Appendix C. Termvis integration och derivation av funktionsserier

SATS 19.12

Om $u_k(x)$ är konstanta och om $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är likformigt konvergent på $[a,b]$, så är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right] dx$$

Bevis:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad , \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

Då $S_n(x) \to S(x)$ likformigt på $[a,b]$, gäller $\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$

HL är $\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right] dx$

VL är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right] dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$

Exempel

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 x} \quad , \quad x > 0$$

Låt $[a,b]$ vara godtyckligt med $0 < a < b < \infty$. konvergensen är likformig på $[a,b]$ så

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b e^{-k^2 x}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{k^2} e^{-k^2 x} \right]_a^b$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} e^{-k^2 a} - \frac{1}{k^2} e^{-k^2 b} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2 a} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2 b}$$ ty båda serierna är konvergenta.

Då $e^{-k^2 a} < 1$, $e^{-k^2 b} \le e^{-b}$ och då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent kan vi låta $a \to 0$

och $b \to \infty$ under summatecknen.

Alltså:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

SATS 19.14 Termvis derivering

Antag $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är punktvis konvergent och $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ är likformigt konvergent på I. Då är

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum \frac{d}{dx} u_k(x) \quad \text{då} \quad x \in I$$

Läsvecka 6
03/12/97

Appendix D: Tillämpningar på potensserier

SATS 19.15

Antag $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien $R > 0$

För varje r, $0 < r < R$, gäller att serien konvergerar likformigt för $|x| \leq r$, och alltså är summan kontinuerlig för $|x| < R$

Bevis

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ är konvergent enligt tidigare sats.

För $|x| \leq r$ är $|a_k x^k| \leq |a_k| r^k$. Alltså är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ likformigt konvergent enligt Weierstrass majorantsats.

SATS 19.6

Antag $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradien $R > 0$.

Då har serierna $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ också konvergensradien R

och för $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gäller:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

för $|x| < R$

"Bevis"

Klart enligt sats 19.15, om man vet att alla konvergensradierna är lika.

Exempel

1938 Bevisa att $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = 1 + 2^{-2} + 3^{-2} + \dots + n^{-2} + \dots$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \left[t = 1-x\right]$$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x}\,dx$$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{-\ln(1-x)}{x}\,dx = \int_0^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) dx$$

$$= \int_0^{1-\varepsilon} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{n-1}}{n}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2}$$ ty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ har konvergensradien 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergerar likformigt och är kontinuerlig för $|x| \leq 1$

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent, Weierstrass)

Alltså:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{-\ln(1-x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$$

SATS 19.11 Dominerad konvergens

I är ett godtyckligt intervall.

Antag

1) $\int_I f_n(x)\,dx$ existerar

2) $f_n(x) \to f(x)$ punktvis då $n \to \infty$ för varje $n \in I$ och $\int_I f(x)\,dx$ existerar

3) Det finns en funktion g på I, sådan att $|f_n(x)| \leq g(x)$ för alla $x \in I$ och alla n, och sådan att $\int_I g(x)\,dx$ existerar.

Då är $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$

Exempel

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = f(x) \quad \text{då } n \to \infty \, , \; x \in [0,1[\; = I$$

$\int_0^1 f(x)\,dx$ existerar

$0 \leq f_n(x) \leq f(x) = g(x)$

Alltså är enligt sats 19.11 $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Läsvecka 6

04/12/97

ANALYS I FLERA VARIABLER

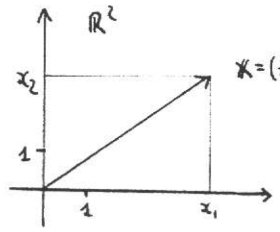
I Funktioner

1) Funktioner av flera variabler

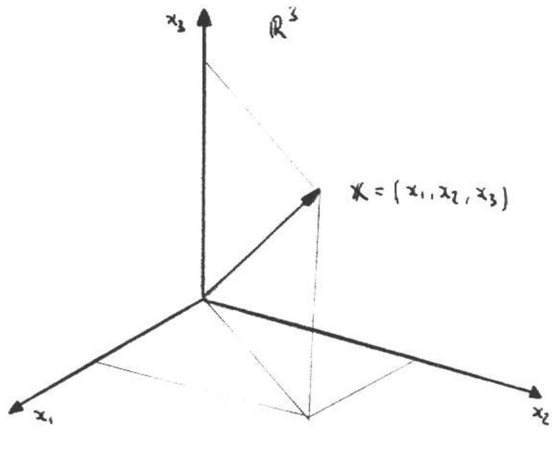
1.2 Rummet $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$: den reella tallinjen

$$\mathbb{R}^2 = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \}$$



$$\mathbb{R}^3 = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$



$$\mathbb{R}^n = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ ,\ x_k \in \mathbb{R} \}$$

Definition

Om $\mathbb{X} = (x_1, \dots, x_n)$ och $\mathbb{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ sätter vi

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$
$$\lambda \mathbb{X} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$
$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$$

Räknelagar

$$\mathbb{X} \cdot (\mathbb{Y} + \mathbb{Z}) = \mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} + \mathbb{X} \cdot \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{0} = (0, \dots, 0)$$

Definition

$$|\mathbb{X}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}}$$
$$|\mathbb{X} - \mathbb{Y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

SATS 1. Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}| \leq |\mathbb{X}| \cdot |\mathbb{Y}|$$

Bevis

Klart om $\mathbb{X} = \mathbb{0}$

Antag $\mathbb{X} \neq \mathbb{0}$.

För alla reella tal t är $0 \leq |t\mathbb{X} + \mathbb{Y}|^2$

$$= (t\mathbb{X} + \mathbb{Y}) \cdot (t\mathbb{X} + \mathbb{Y})$$
$$= t^2 \mathbb{X} \cdot \mathbb{X} + t\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} + t\mathbb{Y} \cdot \mathbb{X} + \mathbb{Y} \cdot \mathbb{Y}$$
$$= t^2 |\mathbb{X}|^2 + 2t\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} + |\mathbb{Y}|^2$$

Bäst olikhet då H.L. blir så litet som möjligt

Derivera med avseende på t och sätt $t = 0$

$$t = -\frac{\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}}{|\mathbb{X}|^2}$$

$$0 \leq |\mathbb{Y}|^2 - \frac{(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})^2}{|\mathbb{X}|^2} \Rightarrow (\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})^2 \leq |\mathbb{X}|^2 |\mathbb{Y}|^2$$

Läsvecka 7
08/12/97

Definition

Vinkeln θ mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ satisfierar $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$ $\quad (0 \le \theta \le \pi)$

SATS 2 Triangelolikheten

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

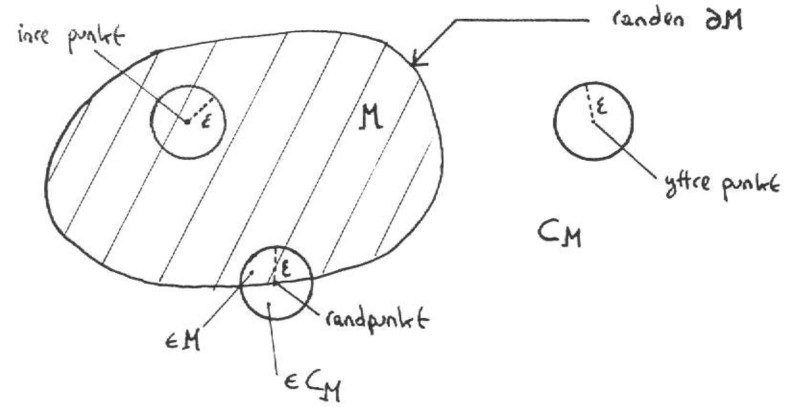
Bevis:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \\ &\le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \end{aligned}$$

Rotutdragning ger påståendet.

3) **Mängder i $\mathbb{R}^n$**

Öppet klot: $|x-a| < r$

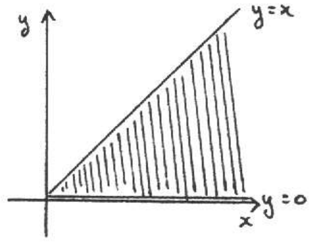


Definition: M kallas
- **öppen** om ingen av dess randpunkter tillhör M
- **sluten** om alla dess randpunkter tillhör M.
- **kompakt** om M är sluten och begränsad.

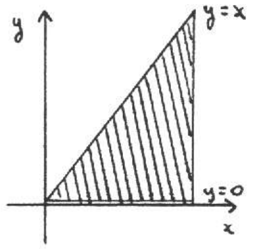
Exempel:

. $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ är öppen, randen är $x^2+y^2=1$

. $\{(x,y) : 0 \leq y \leq x\}$
sluten, ej begränsad.

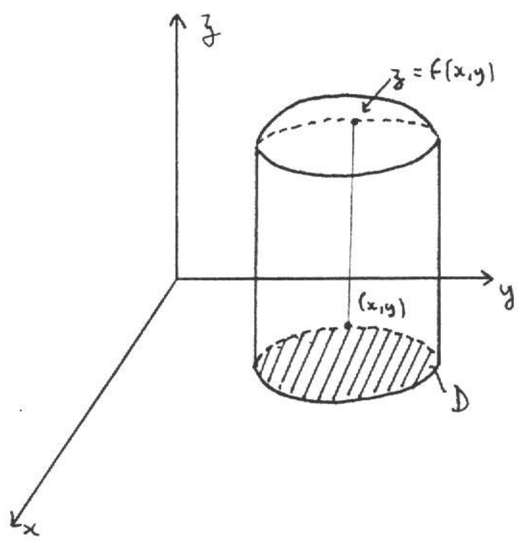


. $\{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$
kompakt



4) Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

. Reellvärda funktioner av två variabler.

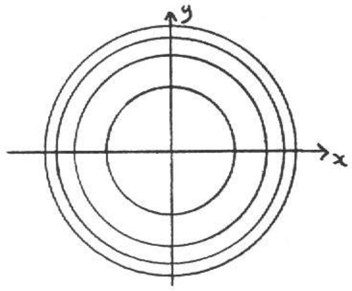


- **Nivåkurvor**: $f(x,y) = c$

Exempel:

$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 = c$



- **Nivåytor**: $f(x,y,z) = c$

Exempel:

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Sfäser $x^2+y^2+z^2 = c$

- Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

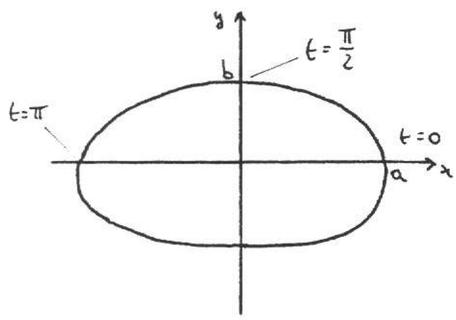
$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_p = f_p(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Kurvor: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Exempel:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ytor : $\mathbb{x} = (x,y,z) = \mathbb{x}(s,t)$

Exempel: $z = f(x,y)$
funktionsyta, sfäriska koordinater.

En sfär med radien R : $r = R$

$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = R\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$

Läsvecka 7
10/12/97

5) Gränsvärden

$\mathbb{f}$ en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med definitionsmängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Antag $\mathbb{a}$ är inre punkt eller randpunkt till D.

$\lim_{\mathbb{x}\to\mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{b} \iff$ till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att $|\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}| < \varepsilon$ för alla $\mathbb{x} \in D$ med $|\mathbb{x} - \mathbb{a}| < \delta$

$\iff |\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}| \to 0$ då $|\mathbb{x} - \mathbb{a}| \to 0$

$$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_p) \quad , \quad \mathbb{b} = (b_1, \dots, b_p)$$

$$|f_i(\mathbb{x}) - b_i(\mathbb{x})| \leq |\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} [f_k(\mathbb{x}) - b_k]^2}$$

$\mathbb{f}(\mathbb{x}) \to \mathbb{b} \iff f_k(\mathbb{x}) \to b_k$ för alla $k = 1 \dots p$

Samma räkneregler som för funktioner av en variabel

Exempel:

$f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{xy + x^2y^3}$ då nämnaren $\neq 0$

$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{1}{1 + xy^2}$$

Undersök $f(x,y)$ då $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$(x,y) \to 0 \Rightarrow x \to 0$ och $y \to 0$

$\Rightarrow t = xy \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+xy^2} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \cdot 1 = 1$$

I två variabler kan man ofta använda polära koordinater : $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Att $f(x,y) \to b$ då $(x,y) \to (0,0)$ betyder att $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to b$ då $r \to 0$ oberoende av φ.

Exempel

- $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2+x^2y}$

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| = \frac{|r^4\cos\varphi\sin^3\varphi|}{|r^2+r^3\cos^2\varphi\sin\varphi|} = \frac{r^2 \overbrace{|\cos\varphi||\sin^3\varphi|}^{\leq 1}}{\underbrace{|1+r\cos^2\varphi\sin\varphi|}_{\geq 1-r|\cos^2\varphi||\sin\varphi| \geq 1-r}} \leq \frac{r^2}{1-r} \to 0 \text{ då } r \to 0$$

(oberoende av φ)

Enligt insättningsregeln blir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 0$

- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$ saknar gränsvärde då $r \to 0$

$f(x,0) = 0$

$f(0,y) = 0$

$f(x,x) = \frac{1}{2}$

• Sätt $g(x,y) = f(x^2,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

$g(0,y) = 0$

$g(x,kx) = \frac{x^2 kx}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{k^2+x^2} \to 0$ då $x \to 0$

Men $g(x,x^2) = f(x^2,x^2) = \frac{1}{2}$

Gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ saknas

b) Kontinuitet

Definition:

Låt $\mathbb{f}$ vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med definitionsmängd D.
Antag $\mathbb{a} \in D$.

$\mathbb{f}$ är kontinuerlig i $\mathbb{a}$ om $\lim_{\mathbb{x}\to\mathbb{a}} \mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(\mathbb{a})$

SATS 4

Om f är reellvärd och kontinuerlig på en kompakt mängd D, så antar f såväl ett största som ett minsta värde på D.
($\max_{\mathbb{x}\in D} f(\mathbb{x})$ resp. $\min_{\mathbb{x}\in D} f(\mathbb{x})$ existerar).