OBS! Denna samling av matematiska definitioner och satser är inofficiell och gjorde av studenter.
Vi reserverar oss vid eventuella felskrivningar.

Matematiska definitioner & satser del. II
Envariabelanalys

Robin Andersson

28 oktober 2013

Innehåll

Inledning

Denna samling av definitioner och satser berör matematisk analys i en variabel. Innehållet är en del från kursen *Fortsättning i matematisk analys*, som undervisas under första läsåret på Teknisk fysik och Teknisk matematik på Chalmers tekniska högskola. Till en del satser kommer även bevis att visas. Denna är en fortsättning från den första inledande kursen i analys i en variabel.

Det finns ingen garanti för att detta är helt felfritt. Vid eventuella synpunkter eller upptäckta fel kontakta gärna *robiand@student.chalmers.se*.

1 Satser och bevis

1.1 Lösning till en linjär differentialekvation kan delas upp i en partikulärlösning och homogenlösning

Sats:

Låt y_p vara en lösning till

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x).$$

Då är y en lösning till ekvationen ovan omm

$$y = y_h + y_p,$$

där y_h är en homogenlösning till y.

Bevis:

Eftersom $y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$ är linjär satisfierar den

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2),$$
$$\mathcal{L}(\alpha y) = \alpha \mathcal{L}(y).$$

På grund av detta följer

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(y_h + y_p) = \mathcal{L}(y_h) + \mathcal{L}(y_p) = 0 + h(x) = h(x).$$

Antag det omvända, d.v.s. att y är en lösning till

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x).$$

Vi definierar då $y_h = y - y_p$, då gäller

$$y = y_h + y_p$$

och

$$\mathcal{L}(y_h) = \mathcal{L}(y - y_p) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_p) = h(x) - h(x) = 0.$$

Vilket också visar att y_h löser

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0. \qquad \square$$

1.2 Lösningsformeln för en homogen linjär differentialekvation av ordning n med konstanta koefficienter

Sats:

Låt r_1 och r_2 vara nollställena till det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 + ar + b$. Då ges samtliga lösningar till $y'' + ay' + by = 0$ av

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \text{ då } r_1 \neq r_2,$$
$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} \text{ då } r_1 = r_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Bevis:

Sätt: $y(x) = z(x)e^{wx} \quad w \in \mathbb{C}$.

Då gäller

$$y' = e^{wx}(z' + wz),$$
$$y'' = e^{wx}(z'' + 2wz' + w^2 z).$$

Insättning i $y'' + ay' + by = 0$ ger då

$$e^{wx}\Big(z'' + (2w + a)z' + (w^2 + aw + b)z\Big) = 0$$
$$\underset{e^{wx} \neq 0 \forall x}{\Leftrightarrow} z'' + (2w + a)z' + (w^2 + aw + b)z = 0.$$

Identifiering nu så ser vi att koefficienten för z är lika med värdet av $p(r)$ då $r = w$:

$$w^2 + aw + b = p(w).$$

Väljer vi w som ett nollställe r_1 till $p(r)$ får vi

$$z'' + (2r_1 + a)z' = 0 \Rightarrow z'' + (r_1 - r_2)z' = 0$$

på grund av att $a = -(r_1 + r_2)$. Vi har erhållit en linjär ekvation av första ordningen om z' betraktas som obekant, och får då enligt sats

$$z' = Ce^{(r_2 - r_1)x}.$$

Fall 1: $r_1 \neq r_2$, integrering ger

$$z = \frac{C}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + C_1.$$

Sätt: $C_2 = \frac{C}{r_2 - r_1}$ och tillbaka till y så får vi

$$y = ze^{r_1 x} = C_2 e^{r_2 x} + C_1 e^{r_1 x}.$$

Fall 2: $r_1 = r_2$, då blir $z' = C$ och vi får med $C_1 = C$ att

$$z = C_1 x + C_2,$$

alltså

$$y = (C_1 x + C_2)e^{r_1 x}. \qquad \square$$

1.3 Taylors formel

Bevis: Givet en funktion f som är en primtiv till sin derivata f' kan vi skriva

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partialintegrering av integralen i högerledet samt att vi väljer funktionen t-x istället för t, ty x kan betraktas som en konstant. Detta ger då

$$f(x) = f(0) + [(t-x)f'(t)]_{t=0}^{x} - \int_0^x (t-x)f''(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ytterligare en partialintegration ger

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \left[\frac{1}{2}(t-x)^2 f''(t)\right]_{t=0}^{x} + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partialintegrerar vi igen så ser vi samma mönster

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{(n+1)}(x),$$

där

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Med vår restterm på integralform tillämpar vi integralkalkylens generaliserade medelvärdessats. Förutsättningen $g \geq 0$ kan modifieras till att g ska ha samma tecken i hela integrationsintervallet, vilket är uppfyllt för $g(t) = (t-x)^n$.

Alltså

$$\exists\,\theta : 0 \leq \theta \leq 1 :\ R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) \int_0^x (t-x)^n\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x)\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad \square$$

1.4 Cauchys medelvärdessats

Givet två funktioner f och g som uppfyller följande krav:

- f, $g \in C[a,b]$, $a < b$
- f, g är deriverbara i $[a,b]$
- $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in (a,b)$ Då gäller

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ för något } \xi \in (a,b)$$

Bevis: Sätt $h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$.
Här gäller att

- $h(x) \in C[a,b]$
- $h(x)$ är deriverbar i (a,b)
- $h(a) = (f(b) - f(a)) \cdot g(a) - (g(b) - g(a)) \cdot f(a) = h(b)$

Rolles sats ger:

$$\exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0 \Rightarrow (f(b)) - f(a) \cdot g'(\xi) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

Vi får nu att

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

eftersom $g'(\xi) \neq 0$ ty $\xi \in (a,b)$ och $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$.
Samt att $g(b) - g(a) = \underbrace{\underbrace{g'(\eta)}_{\neq 0} \underbrace{(b-a)}_{>0}}_{\neq 0}$ för något $\eta \in (a,b)$, enligt Lagranges medelvärdessats. $\square$

1.5 L'hospitals regel

Sats: Givet två funktioner f och g som uppfyller följande krav:

- $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ eller $g(x) \to \infty$, då $x \to x_0$
- f, g är deriverbara i $(x_1, x_0) \cup (x_0, x_2)$ och g skall ha konstant tecken i $(x_1, x_0) \cup (x_0, x_2)$ (kan vara olika tecken)

- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Då gäller

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bevis: *Fall I.* $x \to x_0^+$ och $f(x), g(x) \to 0$.

Antag att

- $f, g \in C[a,b]$
- f, g är deriverbara i (a,b)
- $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in (a,b)$

Då gäller

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ för något } \xi \in (a,b)$$

enligt Cauchys medelvärdessats.
Sätt $f(x_0) - g(x_0) = 0$. För $x \in (x_0, x_2)$ gäller enligt cauchys medelvärdessats att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \xi(x) \in (x_0, x).$$

Alltså gäller att $\xi(x) \to x_0^+$ då $x \to x_0^+$. Detta ger att

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{\underbrace{g'(x)}_{g' \neq 0, \text{ konst. tecken}}}$$

Fall II. $x \to x_0+$ och $g(x) \to \infty$. Antag att $g(x) > 0, g'(x) < 0 \, \forall \, x \in (x_0, x_2)$

För $x_0 < x < a < x_2$ gäller

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ för något } c \in (x,a)$$

enligt cauchys medelvärdessats.

Omskrivning av $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ ger

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(a)}{g(x)} - \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Vi skall visa att

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ gäller } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}}_{=A} \right| < \varepsilon.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(x)} - \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \leq$$

$$(\text{enl. triangelolikheten}) \leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f(a)}{g(x)} \right| + \left| \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \right|.$$

Fixera $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow \exists\, a \in (x_0, x_2) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in (x_0, a)$$

Då gäller

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{f(a)}{g(x)} \right| + \underbrace{\left| \frac{g(a)}{g(x)} \right|}_{>0} \cdot \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A + A \right|}_{\geq |\frac{f'(c)}{g'(c)} - A| + |A| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |A|} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{f(a)}{g(x)} \right| + \left| \frac{g(a)}{g(x)} \right| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} + |A| \right) \; \forall x \in (x_0, b)$$

Eftersom $g(x) \to +\infty$, $x \to x_0^+$,$\exists\, b \in (x_0, a)$:

$$\left| \frac{f(a)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in (x_0, b)$$

På samma sätt

$$\exists\, d \in (x_0, b) : \left| \frac{g(a)}{g(x)} \right| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} + |A| \right) < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in (x_0, d).$$

Alltså:
$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon \; \forall x \in (x_0, d)$. Sätt $\delta = d - x_0$. Påståendet är bevisat $\square$.

1.6 Fixpunktssatsen

Sats:

Antag $\exists\, a,b \in \mathbb{R}, a < b$ och

- 1. $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$.
- 2. $\exists\, k \in (0,1) : |f(x) - f(z)| \leq k|x - z|\, \forall\, x,z \in [a,b]$.

Då gäller

- *I.* $\exists$ en entydigt bestämd punkt $\xi \in [a,b] : f(\xi) = \xi$.
- *II.* Fixera $x_0 \in [a,b]$ (helt godtyckligt).

  Sätt: $x_{n+1} = f(x_n)\,, n = 0,1,2,...$

Då gäller att $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerar och har gränsvärdet ξ.

Bevis:

- (1). Entydighet.

Skall visa: $\xi_1 = f(\xi_1), \xi_2 = f(\xi_2), \qquad \xi_1,\xi_2 \in [a,b] \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$ Vi får från *2.* i satsen

$$0 \leq |\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq k|\xi_1 - \xi_2|$$

Men $k \in (0,1)$, alltså för att olikheten skall gälla måste $|\xi_1 - \xi_2| = 0$, d.v.s. $\xi_1 = \xi_2$.

- Existensen.

Skall visa: $\exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) = \xi$.
Sätt: $g(x) = x - f(x), x \in [a,b]$.

Skall visa nu: $\exists\, \xi \in [a,b] : g(\xi) = 0$

Då gäller

$$g(a) = a - \underbrace{f(a)}_{\in [a,b]} \leq 0, \qquad g(b) = b - \underbrace{f(b)}_{\in [a,b]} \geq 0$$

- $g \in C[a,b]$

  $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : g(\xi) = 0$ enligt satsen om mellanliggande värden.

Bevis av *II.* (i satsen)

Fixera $x_0 \in [a,b]$. Bilda talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ då $x_{n+1} = f(x_n), n = 0,1,2,....$
Skall visa $x_n \to \xi$ då $n \to \infty$.

$$|x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - f(\xi)| \leq$$

OBS $(f(x_{n-1}) = x_n$ per definition$, \xi = f(\xi)$ då ξ fixpkt. till f.)

$$\overset{2.}{\leq} k|x_{n-1} - \xi| \leq k^2|x_{n-2} - \xi| \leq ... \leq \underbrace{k^n}_{\substack{\to\, 0\\ n\to\infty}} |x_0 - \xi| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \square$$

1.7 Rotkriteriet

Antag att $a_k \geq 0 \,\forall\, k$ och $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$.
Då gäller:

$$A < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar,}$$

$$A > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerar,}$$

$$A = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ger ingen information.}$$

Bevis:

Antag att $a_k \geq 0 \forall\, k \in \mathbb{N}$ och $\sqrt[k]{a_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$. Antag att $A < 1$, då gäller:

$$\exists\, N : \sqrt[k]{a_k} < q < 1 \,\forall\, k \geq N, \text{ för något } q \in \mathbb{R}.$$

Alltså $a_k < q^k < 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar enl. jämförelsekriteriet med } b_k = q^k, |q| < 1.$$

Antag att A>1.

$$\exists N : \sqrt[k]{a_k} > 1 \,\forall\, k \geq N.$$

Alltså $a_k > 1 \,\forall\, k \geq N$.

Eftersom $a_k \not\to 0, k \to \infty$ divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\square$.

1.8 Integralkriteriet

$$f : [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ f \text{ avtagande}$$

Då gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergerar } \Leftrightarrow \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergerar.}$$

Bevis:

Notis: Se figur 1 till beviset.

Sätt:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),\ n \in \mathbb{N}$$

.

$$f(k+1) \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k), \text{ där } f \text{ avtagande.}$$

Detta ger

$$S_n - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_{n-1} \leq S_n.$$

$$\text{Antag att } \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ är konvergent.}$$

$$S_n \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \forall\, n.$$

Alltså $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsad. Huvudsatsen för positiva serier ger att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x) \text{ konvergerar.}$$

Antag att $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ej är konvergent d.v.s. $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{1}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$

$$\Rightarrow S_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

$$\text{Alltså } \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergerar ej} \qquad \square.$$

1.9 Leibniz konvergenskriterium

Sats:

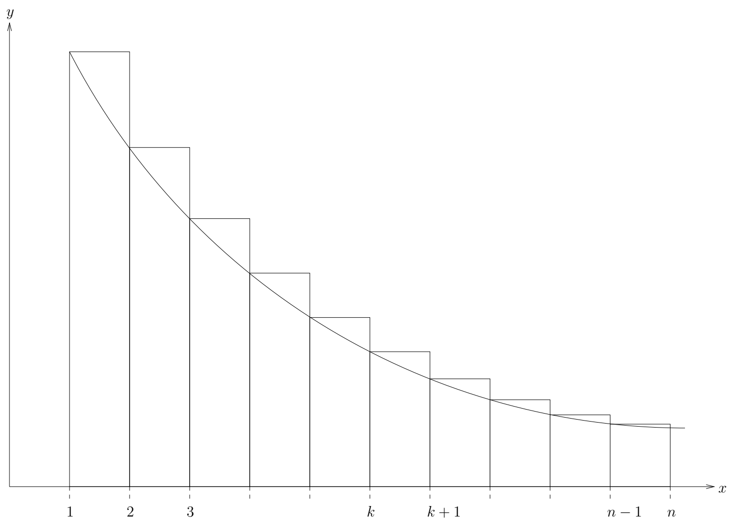
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k \text{ konvergerar för stora } k \text{ om}$$

$$\begin{cases} a_k > 0 \,\forall\, k \\ a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ a_{k+1} \leq a_k (\text{för stora } k) \end{cases}$$

Bevis:

Skall visa att $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar där

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Figur 1: Figuren tillhör beviset för integralkriteriet. Tack till Alexander Grabowski F1, 2012 för figuren.

Betrakta $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$.

$$s_{2(n+1)} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + ... + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2(n+1)})}_{\geq 0} =$$

$$= s_{2n} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \geq s_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Alltså är $(s_{2n})_{n=2}^{\infty}$ är en växande talföljd.

Vidare

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - ... - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - a_{2n} \leq a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alltså $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ växande och uppåt begränsad. Alltså konvergerar $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ enligt satsen om monotona talföljders konvergens.

Sätt $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ Dessutom

$$s_{2n+1} = \underbrace{s_{2n}}_{\substack{\to s \\ n\to\infty}} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}}.$$

Alltså $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$. $\square$

1.10 Om potensseriers konvergens

$$\text{Givet } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k,\, a_k \in \mathbb{R}\,\forall\, k$$

$$\text{Sätt } M = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \text{ konvergerar}\}$$

- 1. $M = \{0\}$
- 2. $\exists\, R \in (0,\infty) : (-R,R) \subset M \subset [-R,R]$
- 3. $M = \mathbb{R}$

Bevis:

Hjälpsats. Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ konvergerar för $x_0 \neq 0$ ($\exists\, x_0 \neq 0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ konvergerar).

Då gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \text{ är absolutkonvergent } \forall\, |x| < |x_0|.$$

Bevis av hjälpsatsen

Notera att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ konvergerar $\Rightarrow a_k \cdot x_0^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Fixera x där $|x| < |x_0|$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \cdot x^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \cdot x_0^k| \cdot \underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|}_{<1}^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \text{ konvergerar,}$$

$$c = \sup\{|a_k \cdot x^k| : k = 0,1,2,...\} < \infty\Box$$

Åter till beviset om potenseriers konvergens.

Fall 1: M obegränsad.

$$\exists\, x_0 \in M\,\forall\, w > 0 : |x_0| > w.$$

Hjälpsatsen ger: $\forall\, x \in \mathbb{R}, |x| < |x_0|$ så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \text{ absolutkonvergent,}$$

absolutkonvergent$\Rightarrow$konvergens, alltså $x \in M$, d.v.s.

$$[-w,w] \subset M, w > 0 \text{ (godtyckligt)} \Rightarrow M = \mathbb{R}.$$

Fall 2: M begränsad.

Sätt: $R \equiv \sup M$.

Det gäller:

$$R \geq 0, \text{ ty } \{0\} \subset M. \text{ Antag att } R = 0.$$

Då gäller

$$M = \{0\}, \text{ ty om } \exists\, x_0 < 0, \text{ då } x_0 \in M,$$

$$\text{så ger hjälpsatsen tidigare } R \geq |x_0| > 0.$$

Skall visa att

- *I.* $M \subset [-R,R]$
- *II:* $(-R,R) \subset M$

I. Antag att $x \in M$ med $|x| > R$. Då gäller

$$\widetilde{x} = \frac{R + |x|}{2} \in M$$

$$\text{Men } \widetilde{x} > R = \sup M \text{ och } \widetilde{x} \notin M.$$

Alltså $M \subset [-R,R]$.

II. Antag att $\exists\, x \in (-R,R)$, där $x \notin M$.

Här $|x| < R$. Det gäller enligt hjälpsatsen att

$$x \in \left(-\frac{|x| + R}{2}, \frac{|x| + R}{2}\right) \subset M \text{ eftersom } \exists\, \widetilde{x} \in M, |\widetilde{x}| > \frac{|x| + R}{2}.$$

Vi får alltså en motsägelse, alltså $(-R,R) \subset M$. $\square$

1.11 Gränsövergång under integraltecknet vid likformig konvergens

Sats:

s_n kontinuerlig på $I = [0,\infty)$

$s_n \to s$ likformig på $[0,a]$ för varje $a > 0$.

$\exists$ en majorerande funktion $g(x)$ på I, d.v.s.

- 1. $|s_n(x)| \leq g(x), x \in I, n \in \mathbb{N}$
- 2. $\int\limits_I g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergerar.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int\limits_I s_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_I s(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bevis:

Enligt sats gäller att $s(x)$ är kontinuerlig på $[0,a]$ för varje $a > 0$. Alltså $s(x)$ är kontinuerlig på I.

Fixera $\varepsilon > 0$.

$$\text{Välj } L \in I : \int\limits_L^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \int\limits_I s_n(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_I s(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int\limits_0^L (s_n(x) - s(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_L^\infty (s_n(x) - s(x))\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\underset{\textit{triangelolikh.}}{\leq} \int\limits_0^L |s_n(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int\limits_L^\infty (\underbrace{|s_n(x)| + |s(x)|}_{\leq 2g(x)})\,\mathrm{d}x}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$s_n \longrightarrow s \text{ likformigt på } [0,L].$$

Alltså

$$\exists\, \widetilde{N} : n \geq \widetilde{N} \Rightarrow |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot L}\ \forall\, x \in [0,L].$$

Vi har nu

$$\left| \int\limits_I s_n(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_I s(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\int\limits_0^L \underbrace{|s_n(x) - s(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2L} \text{ för } n \geq \widetilde{N}}\,\mathrm{d}x}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ för } n \geq \widetilde{N}} < \varepsilon \text{ för } n \geq \widetilde{N}.$$

Alltså

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_I s_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_I s(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

1.12 Weierstrass Majorantsats

Sats:

$$|f_k(x)| \leq a_k \,\forall\, x \in \mathrm{M},\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergerar likformigt på M.}$$

Bevis:

Steg 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergerar punktvis på M.}$$

Fixera $\widetilde{x} \in \mathrm{M}$.

$$\left.\begin{array}{ll} |f_k(\widetilde{x})| \leq a_k & k \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k & \text{konvergerar.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\widetilde{x}) \text{ är absolutkonvergent,}$$

enligt jämförelsekriteriet för positiva serier. Eftersom absolutkonvergens medför konvergens så konvergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\widetilde{x}),\ \widetilde{x} \text{ godtyckligt element i M.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergerar punktvis på M, kalla summan } s(x).$$

Steg 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergerar likformigt mot } s(x) \text{ på M.}$$

Fixera $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar} \Rightarrow \exists\, N : n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon.$$

Alltså $0 \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \,\forall\, n \geq N$. Det gäller:

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) - s(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \,\forall\, n \geq N.$$

Vi har

$$\sup_{x \in \mathrm{M}} \left|\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) - s(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \forall\, n \geq N.$$

Alltså $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på M. $\square$.