

TMA970

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM

Datum: 2025-10-29, kl. 8:30 – 12:30.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\text{(a)} \int_2^\infty \frac{\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[3]{x^4-1}} dx; \quad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}; \quad \text{(c)} \int_0^1 (e^{3x} - 1) \ln(x^2) dx.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, det vill säga sant/falskt.

Om funktionen f är definierad och deriverbar i (a, b) , så följer att

(d) funktionen f' är kontinuerlig i (a, b) ;

(e) funktionen f' har en primitiv i (a, b) ;

(f) funktionen f har en primitiv i (a, b) .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1 p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}, \quad p \neq 0 \quad (3\text{p}); \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos(x + \sqrt{x^2 + x}) \quad (4\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (3p)

(b) Beräkna $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$. (3p)

5. Visa att

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6\text{p})$$

6. För funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gäller att det finns två positiva tal k och T sådana att $f(x+T) = kf(x)$ för alla reella x . Visa att det finns ett positivt tal a och en T -periodisk funktion¹ φ sådana att $f(x) = a^x \varphi(x)$ för alla reella x . (6p)

¹d.v.s. $\varphi(x+T) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

7. Visa att följderna $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, där

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

är växande och uppåt begränsad. Definiera talet e . (7p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk

analys FI / TM1

Lösningar 29/10-2025

- ① (a) konvergent; (b) konvergent;
(c) konvergent; (d) falskt;
(e) sant; (f) sant.

② (a)
$$\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} = \frac{\sin x + 2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin px + 2\sin^2 \frac{px}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2}}{p \cdot \frac{\sin px}{px} + p \frac{\sin \frac{px}{2}}{\frac{px}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{px}{2}}{1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1 + 1 \cdot 0}{p \cdot 1 + p \cdot 0} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

(b) $\arccos(x + \sqrt{x^2 + x}) =$
$$= \arccos \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \arccos \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} =$$
$$= \arccos \frac{x}{\underbrace{-x}_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow x < 0}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$
$$\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

③ $f(x) = xe^{-x^2}$
 $D_f = \mathbb{R}$ $f(x) \begin{cases} > 0 & x > 0 \\ = 0 & x = 0 \\ < 0 & x < 0 \end{cases}$

$$f(-x) = (-x) e^{-(-x)^2} =$$

$$= -x e^{-x^2} = -f(x) \Rightarrow f \text{ udda}$$

ej periodisk

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\pm |x|}{e^{x^2}} = \pm \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(x^2)^{1/2}}{e^{x^2}} = 0$$

$x^2 \rightarrow \infty$

(standardgränsvärde)

horisontell asymptot $y=0$ i $\pm \infty$

$$f'(x) = e^{-x^2} + x e^{-x^2} \cdot (-2x) = (1-2x^2) e^{-x^2}$$

$$f' = 0 \quad i \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f'	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
	$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$

$\Rightarrow f$ har lok. min i $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ och
lok. max i $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f''(x) = -4x e^{-x^2} + (1-2x^2) \cdot (-2x) e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2} (-4x - 2x + 4x^3) =$$

$$= -2x (-2x^2 + 3) e^{-x^2} = 2x (2x^2 - 3) e^{-x^2}$$

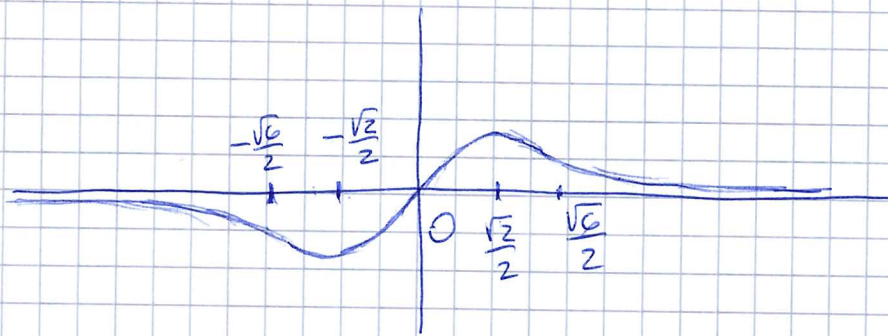
$$f'' = 0 \quad i \quad x = 0 \quad \text{och} \quad i \quad x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

f''	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
	$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$
	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ inflexionspunkter för $x=0$ och $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

f konvex i $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ och $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$ 3
 konkav i $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ och $(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ nll.	$\searrow$ lok. min.	$\nearrow$ nll.	$\searrow$ lok. max.	$\nearrow$ nll.	0
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$



(4.) (a) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx =$
 $= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$
 $= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$
 $= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$

(b) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = e^x - 1 \\ x = \ln(1 + t^2); dx = \frac{2t dt}{1 + t^2} \\ x=0: t=0; x=\ln 2: t=1 \end{array} \right]$
 $= \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt =$
 $= 2 [t]_0^1 - 2 [\arctan t]_0^1 = 2 - 2(\frac{\pi}{4} - 0) =$
 $= \underline{\underline{2 - \frac{\pi}{2}}}$

5. Induktionsberis

4

$$(1) \quad n=1: \quad \left(1 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$\Rightarrow$ påståendet sant för basfallet $n=1$

(2) Antag att påståendet är sant för $n=m$, för något $m \in \mathbb{N}$, d.v.s. ...

(3) Gäller då påståendet även för $n=m+1$?

$$\left(x^{(m+1)-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(m+1)} = \left(x^m e^{\frac{1}{x}}\right)^{(m+1)} =$$

$$= \left(\left(x \cdot x^{m-1} e^{\frac{1}{x}}\right)'\right)^{(m)} =$$

$$= \left(\left(x^{m-1} e^{\frac{1}{x}}\right)' + x \cdot (m-1) x^{m-2} e^{\frac{1}{x}} + x^m e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}\right)^{(m)} =$$

$$= m \cdot \left(x^{m-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(m)} - \left(\left(x^{m-2} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(m-1)}\right)' = \otimes$$

Vi ser att vi behöver visa påståendet separat även för $n=2$, samt anta i (2) att det gäller för både $n=m-1$ och $n=m$, d.v.s.

$$\left(x^{m-2} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(m-1)} = \frac{(-1)^{m-1}}{x^m} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{och}$$

$$\left(x^{m-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m}{x^{m+1}} e^{\frac{1}{x}}$$

Basfall $n=2$:

$$\begin{aligned} \left(x e^{\frac{1}{x}}\right)'' &= \left(e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)' = \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\right)' = \\ &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x - x + 1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ påståendet är sant för $n=1$ och $n=2$

(5)

Om vi nu antar att det är sant för $n=m-1$ och $n=m$, för något $m \geq 2$, så får vi

$$\begin{aligned}
 & \left(x^{(m+1)-1} e^{\frac{1}{x}} \right)^{(m+1)} = \dots = (*) = \\
 & = m \left(x^{m-1} e^{\frac{1}{x}} \right)^{(m)} - \left(x^{m-2} e^{\frac{1}{x}} \right)^{(m-1)}' = \\
 & = m \cdot \frac{(-1)^m}{x^{m+1}} e^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{(-1)^{m-1}}{x^m} e^{\frac{1}{x}} \right)' = \\
 & \text{enl. antagandet} \\
 & = m \frac{(-1)^m}{x^{m+1}} e^{\frac{1}{x}} - (-1)^{m-1} (-m) \frac{1}{x^{m+1}} e^{\frac{1}{x}} - \\
 & \quad - \frac{(-1)^{m-1}}{x^m} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\
 & = \frac{(-1)^{m+1}}{x^{m+2}} e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\cancel{mx} + \cancel{mx} + 1)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ under antagandet stämmer påståendet även för $n=m+1$
 $\Rightarrow$ enligt induktionsprincipen gäller påståendet $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Antag att f kan framställas på det önskade sättet. Då har vi

$$f(x+T) = a^{x+T} \psi(x+T) = a^T \cdot a^x \psi(x) = a^T f(x),$$

så att $a^T = k$



Låt nu $a = k^{1/T}$. Vi behöver visa att

$a^{-x} f(x) = k^{-x/T} f(x) = \varphi(x)$
är en T -periodisk funktion.

$$\begin{aligned}\varphi(x+T) &= k^{-\frac{x+T}{T}} f(x+T) = \\ &= k^{-\frac{x}{T}} \cdot \cancel{k^{-1}} \cdot \cancel{k} f(x) = \varphi(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ är T -periodisk

$\Rightarrow f$ kan framställas på det önskade sättet