TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F/TM
Datum: 2025-08-29, kl. 14.00 – 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.
Betygsgränser: 20–29p ger betyget 3, 30–39p ger betyget 4, 40p+ ger betyget 5.
Beräkningar ska motiveras och redovisas utförligt och fullständigt.

---

1. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, dvs. sant/falskt.
   (a) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
   (b) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{const}$.
   (c) $f(x) = x + \cos x$ är injektiv.
   (d) $f(x) = |x|^3 - 1$ är deriverbar i $\mathbb{R}$.
   (e) $f(x) = \arccos(\cos x)$ har definitionsmängden $[0, \pi]$.
   (f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} \neq 1$.
   (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p, och hela uppgiften ger minst 0p.) (6p)

2. Bestäm gränsvärdena (l'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)
   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}$ (3p) (b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^6 - x^3 + x} - \sqrt{x^6 - 2x^3 + x}\right)$ (3p)

3. Bestäm a så att kurvan $y = \cosh t$, $t \in [-a, a]$ har längden 4 längdenheter. (6p)

4. (a) Bestäm en primitiv funktion till $\dfrac{x^{3/2} - 10}{x^2 + 2x^{3/2} + 5x}$. (3p)
   (b) Beräkna $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} |\sin x|\, dx$. (3p)

5. Rita grafen till funktionen $g(x) = \dfrac{x(x-2)^2}{x-1}$. Ange asymptoter, (lokala) extrempunkter, inflexionspunkter samt konvexitet/konkavitet. (6p)

6. Givet att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $[1, \infty)$, visa att om $\displaystyle\int_1^\infty f^2(x)dx$ är konvergent, så är också $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ konvergent.
   Ge även ett exempel som visar att omvändningen inte gäller. (6p)

7. (a) Ge definitionen av att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. (2p)
   (b) Bevisa att $\dfrac{a^x}{x^\alpha} \to \infty$ då $x \to \infty$, för $a > 1$ och $\alpha > 0$. (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Lycka till!

Uppgift 1

Svar: (a) Falskt. (b) Falskt. (c) Sant. (d) Sant. (e) Falskt. (f) Sant.

Uppgift 2

Lösning:

$$\text{(a)}\quad \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x} = \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{x^2}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$$
$$= \underbrace{\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}}_{\to 1}\Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big)^2\Big(\underbrace{\frac{x/2}{\sin\frac{x}{2}}}_{\to 1}\Big)^2 2 \;\to\; 2 \quad \text{då } x \to 0$$

eftersom $\sin x$ är kontinuerlig, med $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

$$\text{(b)}\quad \lim_{x\to-\infty}\Big(\sqrt{x^6-x^3+x}-\sqrt{x^6-2x^3+x}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^6-x^3+x-\big(x^6-2x^3+x\big)}{\sqrt{x^6-x^3+x}+\sqrt{x^6-2x^3+x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{x^3}{|x|^3}}_{\to -1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}}} = (-1)\cdot\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

eftersom $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, och $\sqrt{x}$ är kontinuerlig.

Svar: (a) 2. (b) $-\dfrac{1}{2}$.

Uppgift 3

Lösning:

$$L = \int_{-a}^{a} |\mathbf{r}'(t)|\,dt\,.$$

$$\mathbf{r}(t) = (t, \cosh t) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}'(t) = (1, \sinh t) \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$$

$$\Rightarrow\quad L = \int_{-a}^{a}\cosh t\,dt = [\text{jämn integrand}] = 2\int_0^a \cosh t\,dt = 2\Big[\sinh t\Big]_0^a = 2\sinh a - 0 = 2\sinh a$$

$$\Rightarrow\quad L = 4 \quad\Leftrightarrow\quad e^a - e^{-a} = 4 \quad\overset{e^a\neq 0}{\Longleftrightarrow}\quad e^{2a}-1 = 4e^a \quad\Leftrightarrow\quad (e^a-2)^2 = 5 \quad\Leftrightarrow\quad e^a = 2\pm\sqrt{5}$$
$$\sqrt{5} > 2\,,\; e^a > 0 \quad\Rightarrow\quad e^a = 2+\sqrt{5} \quad\Leftrightarrow\quad a = \ln(2+\sqrt{5})\,.$$

Svar: $a = \ln(2+\sqrt{5})$.

Uppgift 4

Lösning:

$$\text{(a)}\qquad \int \frac{x^{3/2}-10}{x^2+2x^{3/2}+5x}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ 2tdt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{2(t^3-10)}{t(t^2+2t+5)}dt$$

$$\text{PBUD:}\quad \frac{2(t^3-10)}{t(t^2+2t+5)} = 2 - \frac{4t^2+10t+20}{t(t^2+2t+5)} = 2 - \frac{4t^2+10t+20}{t((t+1)^2+4)} = 2 - \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{(t+1)^2+4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 4t^2+10t+20 = A(t^2+2t+5) + (Bt+C)t$$
$$t^0:\quad 20 = 5A \quad\Leftrightarrow\quad A = 4$$
$$t^1:\quad 10 = 2A + C \quad\Leftrightarrow\quad C = 10-2A = 2$$
$$t^2:\quad 4 = A + B \quad\Leftrightarrow\quad B = 4 - A = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{2(t^3-10)}{t(t^2+2t+5)}dt = \int 2dt - \int \frac{4}{t}dt - \int \frac{2/4}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}dt = 2t - 4\ln|t| - \arctan\left(\frac{t+1}{2}\right) + C$$

$$= \left[t=\sqrt{x}\right] = 2\sqrt{x} - 2\ln x - \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right) + C$$

(b)
$$\int e^{3x}\sin x\,dx \overset{PI}{=} -e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x\,dx \overset{PI}{=} e^{3x}(-\cos x + 3\sin x) - 9\int e^{3x}\sin x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int e^{3x}\sin x\,dx = \frac{1}{10}e^{3x}(-\cos x + 3\sin x) + C$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}|\sin x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin x\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{3x}\sin x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{10}e^{3x}(-\cos x + 3\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{10}e^{3x}(-\cos x + 3\sin x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3}{10}e^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10}e^{-\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{5}\left(3\sinh\frac{3\pi}{2} + 1\right)$$

Svar: (a) $2\sqrt{x} - 2\ln x - \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)$. (b) $\frac{1}{5}\left(3\sinh\frac{3\pi}{2}+1\right)$.

Uppgift 5

Lösning:

$$g(x) = \frac{x(x-2)^2}{x-1} = \frac{x^3-4x^2+4x}{x-1} = x^2 - 3x + 1 + \frac{1}{x-1}, \qquad D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

$x=1$ är en lodrät asymptot, och asymptoter saknas då $x\to\pm\infty$, ty

$$g(x) = \underbrace{x^2-3x+1}_{\to -1} + \frac{1}{x-1} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \infty \quad \text{då } x\to 1^+ \\ \searrow \ -\infty \quad \text{då } x\to 1^- \end{array}$$

$$\frac{g(x)}{x} = x - 3 + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x-1)}}_{\to 0} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \infty \quad \text{då } x\to \infty \\ \searrow \ -\infty \quad \text{då } x\to -\infty \end{array}$$

$$g'(x) = 2x - 3 - \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad D_{g'} = D_g.$$

$$= \frac{(2x-3)(x^2-2x+1)-1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-7x^2+8x-4}{(x-1)^2} = \frac{2(x-2)(x^2-\frac{3}{2}x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= (x-2)\underbrace{\frac{2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right)}{(x-1)^2}}_{>0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g'(x)>0 & \text{då } x>2 \\ g'(x)=0 & \text{då } x=2 \\ g'(x)<0 & \text{då } x<2 \end{cases}$$

Kritiska punkter ges av $g'(x)=0$, dvs. $x=2$. Det är den enda möjliga extrempunkten (ändpunkter samt inre punkter där g ej är deriverbar saknas). g är kontinuerlig, så teckenstudien av $g'(x)$ ger att $x=2$ är en minimipunkt. $g(2)=0$.

$$g''(x) = 2 + \frac{2}{(x-1)^3}, \qquad D_{g''} = D_g$$

$$= \frac{2(x^3-3x^2+3x)}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$$

$$= \underbrace{2x}_{\substack{>0 \text{ då } x>0 \\ <0 \text{ då } x<0}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-1)^3}}_{\substack{>0 \text{ då } x>1 \\ <0 \text{ då } x<1}} \underbrace{\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}_{>0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g''(x)>0 & \text{då } x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty) \\ g''(x)=0 & \text{då } x=0 \\ g''(x)<0 & \text{då } x\in(0,1) \end{cases}$$

g'' växlar tecken i $x = 0 \Rightarrow x = 0$ är en inflexionspunkt.

(Med fördel sammanställs även resultaten ovan i en teckentabell. Notera att $g(x) = 0$ då $x \in \{0, 2\}$.)

Svar: $x = 1$ är asymptot. $g(x)$ har en lokal minimipunkt i $x = 2$, och inflexionspunkt i $x = 0$. $g(x)$ är konvex på $(-\infty, 0)$ respektive $(1, \infty)$, och konkav på $(0, 1)$. Grafen skissas till något liknande

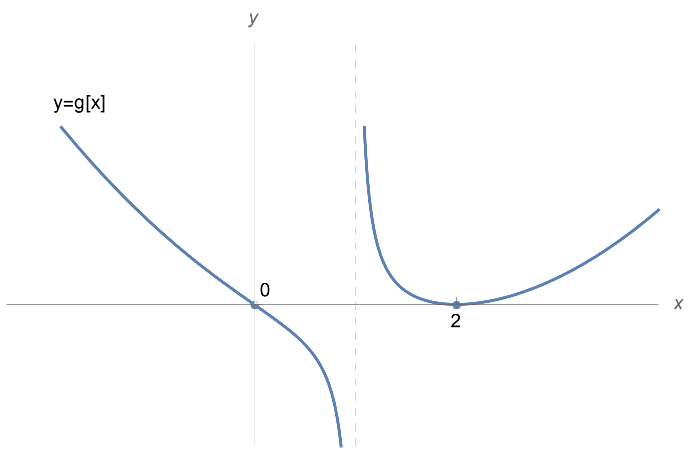

Figure 1: Den skissade grafen till uppgift 5. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Uppgift 6

Lösning:

$$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{f^2(x)}{2} + \frac{1}{2x^2}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \quad \text{är konvergent omm } p > 1, \text{ så om} \quad \int_1^\infty f^2(x) dx \quad \text{är konvergent gäller att}$$
$$\frac{1}{2}\int_1^\infty f^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \int_1^\infty \left(\frac{f^2(x)}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx \quad \text{är konvergent,}$$

och via olikheten ger jämförelsesatsen att

$$\int_1^\infty \left|\frac{f(x)}{x}\right| dx \quad \text{är konvergent.}$$

Dvs. den efterfrågade integralen är absolutkonvergent, och en följdsats till jämförelsesatsen ger att

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{är konvergent.}$$

Omvändningen kan inte gälla, ty för t.ex. $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1/2]$ gäller att

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx\,, \quad p = 1 + \alpha > 1 \qquad \text{är konvergent}$$

men

$$\int_1^\infty f^2(x) dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx\,, \quad p = 2\alpha \le 1 \qquad \text{är divergent.}$$