**TMA970**
**Matematik Chalmers**
**Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F/TM**
Datum: 2025-01-09, kl. 8.30 – 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.
Betygsgränser: 20–29p ger betyget 3, 30–39p ger betyget 4, 40p+ ger betyget 5.
Beräkningar ska motiveras och redovisas utförligt och fullständigt.

---

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, dvs. konvergent/divergent.

   (a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)(x^4+2)}}\,dx$

   Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, dvs. sant/falskt.

   (d) Om en funktion är injektiv, så är den strängt monoton.

   (e) Om en funktion är strängt monoton, så saknar den ett största värde.

   (f) Om en funktion $f(x)$ är monoton och begränsad för alla $x > R \in \mathbb{R}$, så har den ett (ändligt) gränsvärde då $x \to \infty$.

   (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger $-1$p, inget svar ger 0p, och hela uppgiften ger minst 0p.) (6p)

2. Bestäm gränsvärdena (l'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^x$ (3p) (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - \cos x}{x}$ (3p)

3. Beräkna volymen som genereras då området $\{(x,y) : \; y^2 + (x-1)^2 \le 1\,, \;\; y \ge 0\}$ roteras kring $y$-axeln. (5p)

4. (a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$. (3p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(\cos x - 1)(\cos x - 3)^2}dx\,.$ (3p)

5. Rita grafen till funktionen $g(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^{2x}}$. Ange asymptoter, (lokala) extrempunkter, inflexionspunkter samt konvexitet/konkavitet. (6p)

6. Avgör om $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är konvergent eller divergent genom att visa att $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$ för $x \ge 0$. (6p)

7. Motivera varför $\sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$ för $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, och visa att $\displaystyle\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$. (5p)

VÄND! →

8. (a) Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

   (b) Ange definitionen av funktionen $\arcsin x$ och härled dess derivata. (4p)

Lycka till!

## Uppgift 1

Svar: (a) Divergent. (b) Konvergent. (c) Konvergent. (d) Falskt. (e) Falskt. (f) Sant.

## Uppgift 2

Lösning:
(a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-2}\right) = \left[t=\frac{2}{x-2}\right] = \lim_{t\to 0^+}\left(2+\frac{2}{t}\right)\ln(1+t)$$
$$= \lim_{t\to 0^+}(2t+2)\frac{\ln(1+t)}{t} = (0+2)\cdot 1 = 2$$

och eftersom $e^x$ är kontinuerlig gäller

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)} = e^2\,.$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{-x}-1)+2(1-\cos x)}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\underbrace{\frac{(e^x-1)}{x}}_{\to 1} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\to 1} + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}}_{\to 1}\Bigg)^2 = 0\,,$$

eftersom $x^2$ är kontinuerlig i 1.

Svar: (a) $e^2$. (b) 0.

## Uppgift 3

Lösning: Området i $xy$-planet är

$$\{(x,y) : 0\le y\le \sqrt{1-(x-1)^2}\,,\ 0\le x\le 2\}$$

och då det roteras kring $y$-axeln genereras en rotationsvolym

$$V = 2\pi\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx = \left[\begin{array}{c} x-1=\sin t \\ dx=\cos t\,dt\end{array}\right] = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin t)\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt$$
$$= 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin t)\cos^2 t\,dt = \left[\begin{array}{c}\cos^2 t \text{ jämn}\\ \sin t\cos^2 t \text{ udda}\end{array}\right] = 4\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt$$
$$= 2\pi\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi^2\,.$$

Svar: Volymen är $\pi^2$.

## Uppgift 4

Lösning:

(a) $$\int x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \overset{PI}{=} \frac{x^3}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{3}\int\frac{x^2+(1-1)}{x^2+1}dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{3}\int dx - \frac{2}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}\arctan x + C$$

(b) $$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(\cos x-1)(\cos x-3)^2}dx = \left[\begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array}\right] = \int_0^{-1} \frac{-2t}{(t-1)(t-3)^2}dt$$

PBUD: $$\frac{-2t}{(t-1)(t-3)^2} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{(t-3)^2}$$

$$\begin{array}{rl} \Leftrightarrow & -2t = A(t-3)^2+B(t-1)(t-3)+C(t-1) \\ t=1: & -2=4A \quad\Leftrightarrow\quad A=-1/2 \\ t=3: & -6=2C \quad\Leftrightarrow\quad C=-3 \\ t^2: & 0=A+B \quad\Leftrightarrow\quad B=-A=1/2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{-1} \frac{-2t}{(t-1)(t-3)^2}dt &= \int_0^{-1}\left(-\frac{1/2}{t-1}+\frac{1/2}{t-3}-\frac{3}{(t-3)^2}\right)dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t-3|+\frac{3}{t-3}\right]_0^{-1} = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-3}{t-1}\right|+\frac{3}{t-3}\right]_0^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\ln 3-1\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Svar: (a) $\frac{x^3}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2x}{3}-\frac{2}{3}\arctan x.$ (b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}\,.$

## Uppgift 5

Lösning:

$$g(x)=\frac{2e^x}{1+e^{2x}}=\frac{2}{e^{-x}+e^x}=\frac{1}{\cosh x}\,,\quad D_g=\mathbb{R}\,,\qquad g(-x)=g(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{e^{-x}+e^x}=0 \quad \text{ty} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0\,,\ e^x\to\infty \text{ då } x\to\infty$$

$\Rightarrow$ $y=0$ är asymptot då $x\to\pm\infty$.

$$g'(x)=-\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}\,,\quad D_{g'}=D_g$$

Kritiska punkter ges av

$$g'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sinh x=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x-e^{-x}=0 \quad\overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad e^{2x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=0\,.$$

De möjliga extrempunkterna ges av $x=0$, dvs. den kritiska punkten (ändpunkter samt inre punkter där $g$ ej är deriverbar saknas).

$$g'(x)=-\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}=\underbrace{-\frac{e^{-x}}{2\cosh^2 x}}_{<0}\underbrace{(e^{2x}-1)}_{\substack{>0 \text{ då } x>0\\ <0 \text{ då } x<0}} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll} g'(x)<0 & \text{då } x>0 \\ g'(x)=0 & \text{då } x=0 \\ g'(x)>0 & \text{då } x<0 \end{array}\right.$$

samt att $g$ är kontinuerlig, ger att $x=0$ är en maximipunkt. $g(0)=1$.

$$g''(x)=-\frac{\cosh x}{\cosh^2 x}+\frac{2\sinh^2 x}{\cosh^3 x}=-\frac{1}{\cosh x}+\frac{2(\cosh^2 x-1)}{\cosh^3 x}=\frac{\cosh^2 x-2}{\cosh^3 x}\,,\quad D_{g''}=D_g$$

$$g''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cosh^2 x=2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad e^{2x}+1=2\sqrt{2}e^x$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{2x}-2\sqrt{2}e^x=-1 \quad\Leftrightarrow\quad (e^x-\sqrt{2})^2=-1+2=1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x=\sqrt{2}\pm 1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln(\sqrt{2}\pm 1)$$

Låt $r_\pm=\ln(\sqrt{2}\pm 1)$. $g''(x)$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}$ med $g''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{r_-,r_+,\}$, så satsen om mellanliggande värden ger att $g''$ inte kan byta tecken på intervallen $(-\infty,r_-)$, $(r_-,r_+)$ och

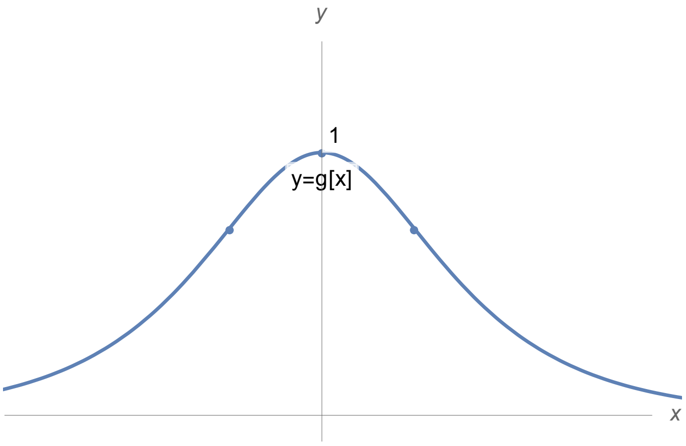
$(r_+, \infty)$. Eftersom $g''(0) = -1$ och $g''(\pm \ln 4) > 0$ (via att $\cosh^2 x - 2 > e^{2|x|}/4 - 2$) gäller alltså att

$$\begin{cases} g''(x) > 0 & \text{då } x \in (-\infty, r_-) \cup (r_+, \infty) \\ g''(x) = 0 & \text{då } x \in \{r_+, r_-\} \\ g''(x) < 0 & \text{då } x \in (r_-, r_+) \end{cases}$$

$g''$ växlar tecken i $r_\pm \Rightarrow r_\pm$ är inflexionspunkter.

(Med fördel sammanställs även resultaten ovan i en teckentabell. Notera att $g$ är en jämn funktion.)

Svar: $y = 0$ är asymptot då $x \to \pm\infty$. $g(x)$ har en maximipunkt i $x = 0$, och inflexionspunkter i $x = \ln(\sqrt{2} \pm 1) = r_\pm$. $g(x)$ är konvex på $(-\infty, r_-)$ respektive $(r_+, \infty)$, och konkav på $(r_-, r_+)$. Grafen skissas till något liknande




## Uppgift 6

Lösning:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{x}{1+x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} > 0\,.$$

$f$ är kontinuerlig på $D_f = \mathbb{R}$ med

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2(1+x^2)+2x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0\,, \quad \forall x \in D_{f'} = \mathbb{R}\,.$$

Därmed är $f$ strängt avtagande på $\mathbb{R}$. Eftersom

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to\infty} \arctan x - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x + x} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$$

gäller därför att $f(x) > \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alltså gäller att

$$0 \le \frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} - \arctan x\,, \quad \forall x \ge 0\,. \tag{1}$$

Dessutom gäller att

$$\int_0^R \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^R = \frac{\ln(1+R^2)}{2} \to \infty \quad \text{då} \quad R \to \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx \quad \text{divergent}$$

och via ekvation (1) ger jämförelsesatsen att även $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är divergent.

Svar: Divergent.