TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F/TM
Datum: 2024-10-30, kl. 8.30 – 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Anna Karlsson, 0721-575850.
Betygsgränser: 20–29p ger betyget 3, 30–39p ger betyget 4, 40p+ ger betyget 5.
Beräkningar ska motiveras och redovisas utförligt och fullständigt.

---

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, dvs. konvergent/divergent.

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{3-x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$

   (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p, och hela uppgiften ger minst 0p.) (3p)

2. (a) Är $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{75}}dx$ konvergent eller divergent? Motivera väl! (3p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ (enbart via standardgränsvärden). (3p)

3. Beräkna längden av kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (e^{-t}\sin t, e^{-t}\cos t)$, $0 \xrightarrow{t} \infty$. (5p)

4. Bestäm den primitiva funktion till $\dfrac{x\arctan x}{(x^2-4)^2}$ vars graf går genom origo. (6p)

5. Låt $g(x) = \dfrac{\sqrt{|x^4-1|}}{x^2+1}$ med $D_g = [1, \infty)$. Visa (utan att använda derivata) att g är injektiv och bestäm g^{-1}. (5p)

6. Rita grafen till funktionen $h(x) = e^x\sqrt[4]{x^2}$. Ange asymptoter, (lokala) extrempunkter och inflexionspunkter. (7p)

7. Låt $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} - 3\right) & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$.

   (a) Ange definitionen av att en funktion är deriverbar i en punkt. (2p)

   (b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i den punkten. (3p)

   (c) Visa att f är deriverbar i hela $\mathbb{R}$, men att dess derivata inte är kontinuerlig i 0. (4p)

   (d) Visa att f har ett strängt lokalt maximum i origo, men att f inte är växande i något intervall $(-\epsilon, 0)$ och inte avtagande i något intervall $(0, \epsilon)$, där $\epsilon > 0$. (3p)

8. Formulera och bevisa analysens huvudsats. (6p)

Lycka till!

Uppgift 1

Svar: (a) Konvergent. (b) Divergent. (c) Divergent.

Uppgift 2

Lösning:
(a) Integralen är generaliserad i ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{75}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{75}}}\right)^{75}=0 \quad \text{ty} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{75}}}=0 \quad \text{och } x^{75} \text{ är kontinuerlig.}$$

Alltså finns något $M>0$ sådant att

$$0<\frac{(\ln x)^{75}}{x}<1\,,\ \forall x>M \qquad \Leftrightarrow \qquad 0<\frac{1}{x}<\frac{1}{(\ln x)^{75}}\,,\ \forall x>M\,.$$

Eftersom $\int_M^\infty \frac{1}{x}dx$ är divergent ger jämförelsesatsen att $\int_M^\infty \frac{1}{(\ln x)^{75}}dx$ är divergent.

$$\Rightarrow \quad \int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{75}}dx \quad \text{divergent.}$$

(b) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}=\left[\begin{array}{r}1-x=\cos z\\ z\in[0,\pi]\end{array}\right]=\lim_{z\to 0^+}\frac{z}{\sqrt{1-\cos z}}=\lim_{z\to 0^+}\frac{z}{\sqrt{2\sin^2\frac{z}{2}}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{z\to 0^+}\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=\sqrt{2}\,.$$

Svar: (a) Divergent. (b) $\sqrt{2}$.

Uppgift 3

Lösning: Om integralen är konvergent gäller

$$L=\int_0^\infty |\mathbf{r}'(t)|dt\,.$$

$$\mathbf{r}'(t)=-e^{-t}(\sin t,\cos t)+e^{-t}(\cos t,-\sin t)=e^{-t}(-\sin t+\cos t,-\cos t-\sin t)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}'(t)|=e^{-t}\sqrt{(-\sin t+\cos t)^2+(-\cos t-\sin t)^2}=e^{-t}\sqrt{2(\cos^2 t+\sin^2 t)}=e^{-t}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad L=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}dt=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty=-\sqrt{2}\lim_{R\to\infty}e^{-R}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\,.$$

Svar: Längden av kurvan är $\sqrt{2}$.

Uppgift 4

Lösning:

$$F(x)=\int\frac{x\arctan x}{(x^2-4)^2}dx \overset{PI}{=} -\frac{1}{2(x^2-4)}\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)}dx$$

PBUD: $$\frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)}=\frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 1=A(x+2)(x^2+1)+B(x-2)(x^2+1)+(Cx+D)(x-2)(x+2)\\
x=2:&\quad 1=20A \quad \Leftrightarrow \quad A=1/20\\
x=-2:&\quad 1=-20B \quad \Leftrightarrow \quad B=-1/20\\
x^3:&\quad 0=A+B+C \quad \Leftrightarrow \quad C=-A-B=0\\
x=0:&\quad 1=2A-2B-4D \quad \Leftrightarrow \quad 4D=2(A-B)-1 \overset{A-B=1/10}{=} -4/5 \quad \Leftrightarrow \quad D=-1/5
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)}dx = \frac{1}{20}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{20}\int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$
$$= \frac{1}{20}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) - \frac{1}{5}\arctan x + C$$
$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{40}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{5}\right)\frac{\arctan x}{2} + C$$
$$0 = F(0) = \frac{1}{40}\ln 1 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$$

Svar: $\frac{1}{40}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{5}\right)\frac{\arctan x}{2}$.

Uppgift 5

Lösning: Om $a, b \in D_g$, $a \neq b \Rightarrow g(a) \neq g(b)$ gäller att g är injektiv. För $a, b \in D_g = [1, \infty)$ gäller

$$g(a) = \frac{\sqrt{|a^4-1|}}{a^2+1} = \sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}} = \sqrt{1-\frac{2}{a^2+1}}$$

varifrån kan ses att g är strängt växande på D_g, t.ex. via

$$g(a) < g(b) \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{2}{a^2+1} < 1-\frac{2}{b^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{b^2+1} < \frac{2}{a^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2+1 < b^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad a < b$$

Därmed är g injektiv och strängt växande. Eftersom g även är kontinuerlig, med $g(1) = 0$ och

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{1}{x^2}} = [\sqrt{\cdot} \text{ kontinuerlig}] = \frac{\sqrt{1-0}}{1+0} = 1$$

ger satsen om mellanliggande värden att $V_g = [0, 1)$. För $x \in D_g = [1, \infty)$ och $y \in V_g = [0, 1)$ gäller

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1-\frac{2}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1-y^2 = \frac{2}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1 = \frac{2}{1-y^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1+y^2}{1-y^2} \quad \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad x = \sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}} = g^{-1}(y)$$

Svar: $g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}}$, $D_{g^{-1}} = [0, 1)$.

Uppgift 6

Lösning:

$$h(x) = e^x\sqrt[4]{x^2} = e^x\sqrt{|x|} = \begin{cases} e^x\sqrt{x} & \text{då } x \geq 0 \\ e^x\sqrt{-x} & \text{då } x < 0 \end{cases}, \quad D_h = \mathbb{R}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x\sqrt{|x|} = 0\,, \qquad \frac{h(x)}{x} = \frac{e^x}{x^{1/2}} \to \infty \quad \text{då } x \to \infty$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ är asymptot då $x \to -\infty$, asymptot saknas då $x \to \infty$.

$$h'(x) = \left\{\begin{array}{ll} e^x\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}} & \text{då } x > 0 \\ e^x\sqrt{-x} - \frac{e^x}{2\sqrt{-x}} = -\frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{-x}} & \text{då } x < 0 \end{array}\right\} = \operatorname{sgn} x\,\frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{|x|}}\,, \quad D_{h'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Kritiska punkter ges av

$$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1/2$$

De möjliga extrempunkterna ges av $x \in \{-1/2, 0\}$, dvs den kritiska punkten och den inre punkten där h ej är deriverbar (ändpunkter saknas).

$$h'(x) = \underbrace{\operatorname{sgn} x}_{\substack{>0 \text{ då } x>0 \\ <0 \text{ då } x<0}} \cdot \underbrace{\frac{e^x}{2\sqrt{|x|}}}_{>0} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\substack{>0 \text{ då } x>-1/2 \\ <0 \text{ då } x<-1/2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h'(x) > 0 & \text{då } x \in (-\infty, -1/2) \cup (0, \infty) \\ h'(x) = 0 & \text{då } x = -1/2 \\ h'(x) < 0 & \text{då } x \in (-1/2, 0) \end{cases}$$

ger att $x = 0$ är en lokal minimipunkt, och att $x = -1/2$ är en lokal maximipunkt. Eftersom $h(0) = 0$ och h är kontinuerlig med $h(x) \to 0^+$ då $x \to -\infty$ ger teckenstudien av h' att $x = 0$ är en minimipunkt. $h(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

$$h''(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(e^x(2x+1)+2e^x)2\sqrt{x}-e^x(2x+1)/\sqrt{x}}{4x} & \text{då } x>0 \\ -\frac{(e^x(2x+1)+2e^x)2\sqrt{-x}+e^x(2x+1)/\sqrt{-x}}{-4x} & \text{då } x<0 \end{array} \right\} = \frac{e^x(4x^2+4x-1)}{4|x|^{3/2}}, \quad D_{h''} = D_{h'},$$

$$h''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Låt $r_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$h''(x) = \underbrace{\frac{e^x}{|x|^{3/2}}}_{>0}(x - r_+)(x - r_-) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h''(x) > 0 & \text{då } x \in (-\infty, r_-) \cup (r_+, \infty) \\ h'(x) = 0 & \text{då } x \in \{r_+, r_-\} \\ h'(x) < 0 & \text{då } x \in (r_-, r_+) \setminus \{0\} \end{cases}$$

h'' växlar tecken i $r_\pm \Rightarrow r_\pm$ är inflexionspunkter.

(Med fördel sammanställs även resultaten ovan i en teckentabell.)

<u>Svar:</u> $y = 0$ är asymptot då $x \to -\infty$. $h(x)$ har en minimipunkt i $x = 0$, en lokal maximipunkt i $x = -1/2$, och inflexionspunkter i $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Grafen skissas till något liknande