TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2024-08-30, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^5+1}}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x} dx; \qquad \textbf{(c)} \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$$

Nedan gäller $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om $f(x)$ är kontinuerlig i (a,b), så är $|f(x)|$ kontinuerlig i (a,b).
(e) Om $|f(x)|$ är kontinuerlig i (a,b), så är $f(x)$ kontinuerlig i (a,b).
(f) Om $f(x)$ är kontinuerlig i (a,b), så är $\dfrac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$ kontinuerlig i (a,b).

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})} \quad \text{(3p)}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to a_+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}, \; a>0 \quad \text{(3p)}.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x + \ln|x|$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$. (3p)

5. Givet att man känner till grafen till funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, förklara hur man får fram grafen till funktionen $g(x) = \dfrac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$. (3p)

6. Funktionen $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[a,\infty)$ och har ändligt gränsvärde när $x \to \infty$. Visa att f är begränsad i intervallet $[a,\infty)$. (6p)

7.(a) Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

(b) Härled derivatan av funktionen $f(x) = \ln x$ dels med hjälp av satsen om invers funktions derivata. (2p)

(c) Låt $g(x) = x + \ln x$. Visa att g är inverterbar och beräkna inversens derivata i punkten $y = 1$. (3p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 30/8 - 2024

1. (a) konvergent ; (b) divergent ;
(c) konvergent ; (d) sant ;
(e) falskt ; (f) sant.

---

2. (a)
$$\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})} = \frac{\ln\left(e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+1\right)\right)}{\ln\left(e^{2x}\left(\frac{x^4}{e^{2x}}+1\right)\right)} =$$

$$= \frac{\ln e^x + \ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\ln e^{2x} + \ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \frac{x\left(1+\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)/x\right)}{2x\left(1+\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)/2x\right)}$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

(b)
$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{(x+a)(x-a)}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{x-a+\sqrt{x-a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \xrightarrow[x\to a_+]{} \frac{0+2\sqrt{a}}{\sqrt{2a}\cdot 2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

---

3. $f(x) = x + \ln|x|$ $\quad D_f : x \neq 0$

Nollställen och tecken: kommer att följa ur analysen

inga symmetrier

2

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{"}\infty + \infty\text{"} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} f(x) = \text{"}0 + (-\infty)\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\Big(1+\underbrace{\frac{\ln(-x)}{x}}_{\to 0}\Big) = -\infty$$

Vertikal asymptot i 0

Sneda asymptoter:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{\ln|x|}{x}}_{\to 0}\Big) = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - 1\cdot x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x| = +\infty$$

$\Rightarrow$ inga sneda asymptoter i $\pm\infty$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \qquad f'(-1) = 0$$

x		-1		0		
f'	$+$	0	$-$		$+$	$+$

$\Rightarrow$ f växande i $(-\infty,-1)$,
avtagande i $(-1,0)$

$\Rightarrow$ f har lok. max i -1

$$f(-1) = -1 + \ln|-1| = -1 + 0 = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ $f < 0 \quad \forall\, x < 0$

$f' > 0$ i $(0,\infty) \Rightarrow f$ växande i $(0,\infty)$

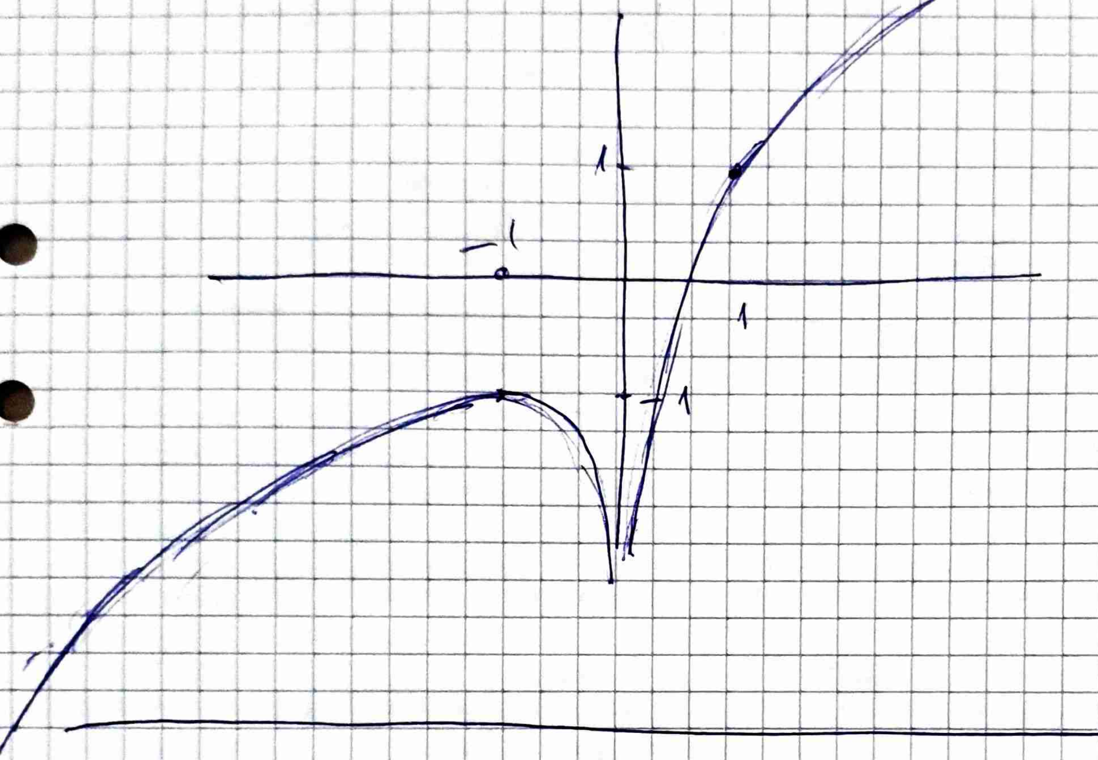
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{i } (-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

$\Rightarrow$ f konkav i $(-\infty,0)$ och
i $(0,\infty)$

$f(1) = 1 > 0 \Rightarrow f$ har exakt ett nollställe $\in (0,1)$

3

x		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	$-\infty$	↗	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$+$	$+$
f''	$-$	$-$			$-$	$-$



---

4. (a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \int \frac{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\, dx =$$

$$= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} \quad (+C)$$

(b) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \arcsin x \, dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \arcsin x = t \\ dx = \cos t \, dt \\ x=0: t=0;\ x=1: t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot t \cdot \cos t \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos t|}_{\cos t \geq 0 \text{ i } [0, \frac{\pi}{2}]} \cdot t \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^2 t \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \overset{p.i.}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin 2t\,dt\right) =$$

$$= \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\left[\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8}(-1-1) = \underline{\underline{\frac{\pi^2-4}{16}}}$$

---

5. $|f(x)| - f(x) = \begin{cases} f(x)-f(x) = 0 & f(x)\geq 0 \\ -f(x)-f(x) = -2f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{för } f(x) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g:s graf sammanfaller med x-axeln där $f>0$ och är en spegling av f:s graf i x-axeln där $f<0$.

---

6. Låt $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} l \in \mathbb{R}$

Tag $\varepsilon = 1$; $\exists N : \forall x > N \; |f(x) - l| < 1$

$|f(x) - l| < 1 \iff l-1 < f(x) < l+1 \quad \forall x > N$

$[a, N]$ slutet och begränsad; f kontinuerlig

$\Rightarrow |f| \leq M$ i $[a, N]$ för något $M \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow -M+l-1 \leq f(x) \leq M+l+1 \quad \forall x \geq a$

$\Rightarrow f$ begränsad i $[a, \infty)$