

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2023-01-05, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

- 1.** Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\int_1^\infty \frac{x \ln x}{x^3 + 1} dx$; (b) $\int_0^1 x \sqrt{|\ln x|} dx$; (c) $\int_0^9 \frac{dx}{3 - \sqrt{x}}$.

Nedan gäller $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, och F är en primitiv till f i \mathbb{R} . Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

- (d) Det följer att funktionen F är deriverbar i \mathbb{R} .
(e) Det följer att funktionen F är kontinuerlig i \mathbb{R} .
(f) Det följer att funktionen f är kontinuerlig i \mathbb{R} .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

- 2.** Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 - 1)}$ (3p); (b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbb{N}$ (3p).

- 3.** Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

- 4.(a)** Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \ln^2 x$. (3p)

- (b)** Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$. (3p)

- 5.** För en Riemannintegrerbar funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieras dess integralmedelvärde över intervallet $[a, b]$ som $M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Beräkna integralmedelvärdet av funktionen $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ över intervallet $[0, 2\pi]$. (5p)

- 6.** Visa att följdene $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, är avtagande och nedåt begränsad. (5p)
Visa att $b_n > e$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (2p)

7. Funktionerna f och g är definierade i mängden $D \subset \mathbb{R}$ och punkten x_0 är hoppningspunkt för D . Givet att $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, visa att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$ finns och är lika med AB . (6p)

Anmärkning. Du kan välja mellan $x_0 \in \mathbb{R}$ och $x_0 = -\infty$; A och B är reella tal.

8.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion i en punkt. (2p)

(b) Formulera och bevisa analysens huvudsats (Newton-Leibniz sats). (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TM4970 Introduktion till matematisk analys F1 / TM1

Lösningar 5/1-23

1. (a) konvergent ; (b) konvergent ;
 (c) divergent ; (d) sant ;
 (e) sant ; (f) falskt.

2. (a) $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)} = \frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{\ln(x^3(1+\frac{1}{x^3}))} =$
 $= \frac{\ln x^2 + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln x^3 + \ln(1+\frac{1}{x^3})} = \frac{2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{3\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^3})} =$
 $= \frac{2 + (\ln(1+\frac{1}{x^2})/\ln x)}{3 + (\ln(1+\frac{1}{x^3})/\ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$

(b) $\frac{\sin mx}{\sin nx} = \begin{cases} x = \pi - t \\ x \rightarrow \pi \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$

$$= \frac{\sin m(\pi-t)}{\sin n(\pi-t)} = \frac{(\sin m\pi)\cos mt - (\cos m\pi)\sin mt}{(\sin n\pi)\cos nt - (\cos n\pi)\sin nt} =$$

$$\stackrel{\pi=0}{=} (-1)^m$$

$$= (-1)^{m-n} \frac{\sin mt}{\sin nt} \cdot \frac{nt}{mt} \cdot \frac{mt}{nt} =$$

$$= (-1)^{m-n} \left(\frac{\sin mt}{mt} \right) \cdot \left(\frac{mt}{\sin nt} \right) \cdot \frac{m}{n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} (-1)^{m-n} \frac{m}{n}$$

3.

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

2.

$D_f : x \neq 1$

$$f(x) = 0 \quad \text{for } x = \frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} f > 0 \text{ for } x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} f < 0 \text{ for } x < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

inga symmetrier

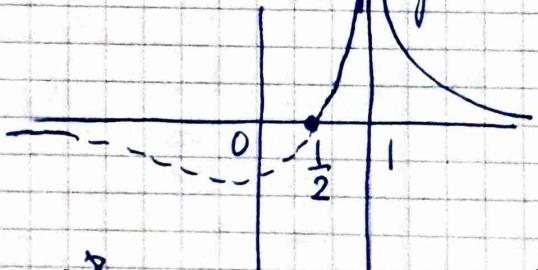
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad \left(\frac{\text{grad 1}}{\text{grad 2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{"1"}{+0} = +\infty$$

\Rightarrow vertikal asymptot $x = 1$

smed (horisontell) asymptot $y = 0 ; i \pm \infty$

Skiss:



$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1)^2 - 2(x+1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(0) = 0, \quad f' < 0 \quad \forall x > 1$$

$$f' > 0, \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$f' < 0, \quad \forall x < 0$$

\Rightarrow f avtagande i $(-\infty, 0)$

f har lok. min i 0

f växande i $(0, 1)$

f avtagande i $(1, \infty)$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)^3 - (-2x) \cdot 3(x+1)^2}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x^2 + 6x}{(x-1)^4} = 2 \cdot \frac{2x^3 + 1}{(x-1)^4}$$

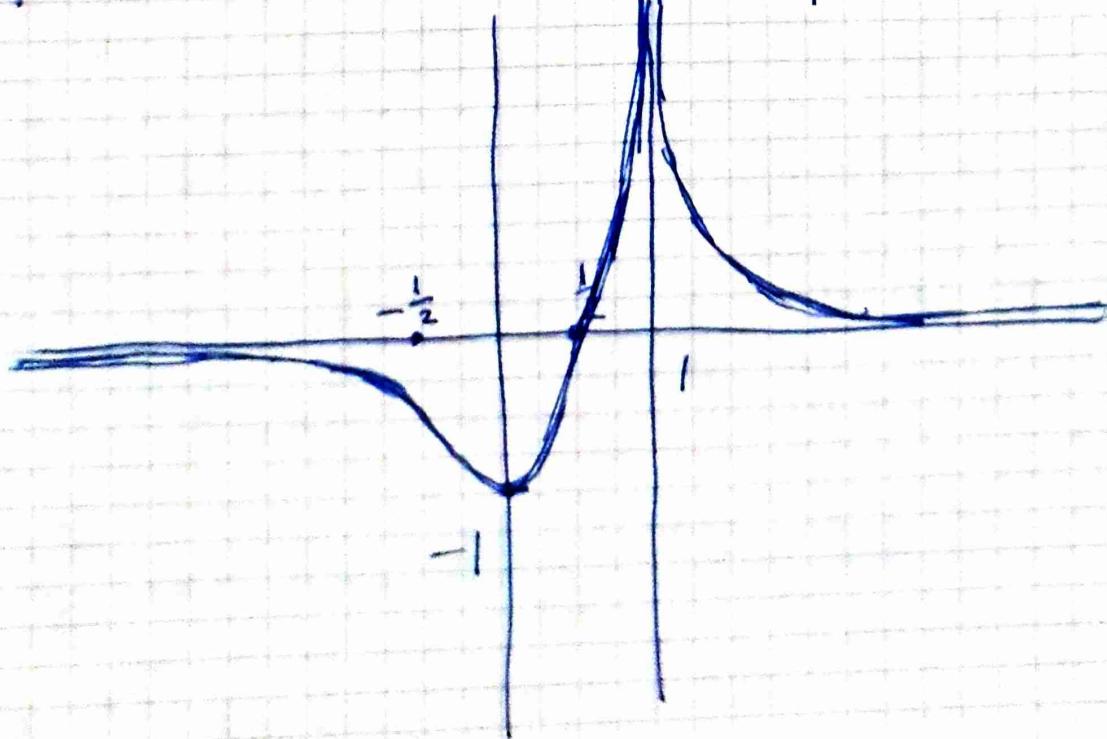
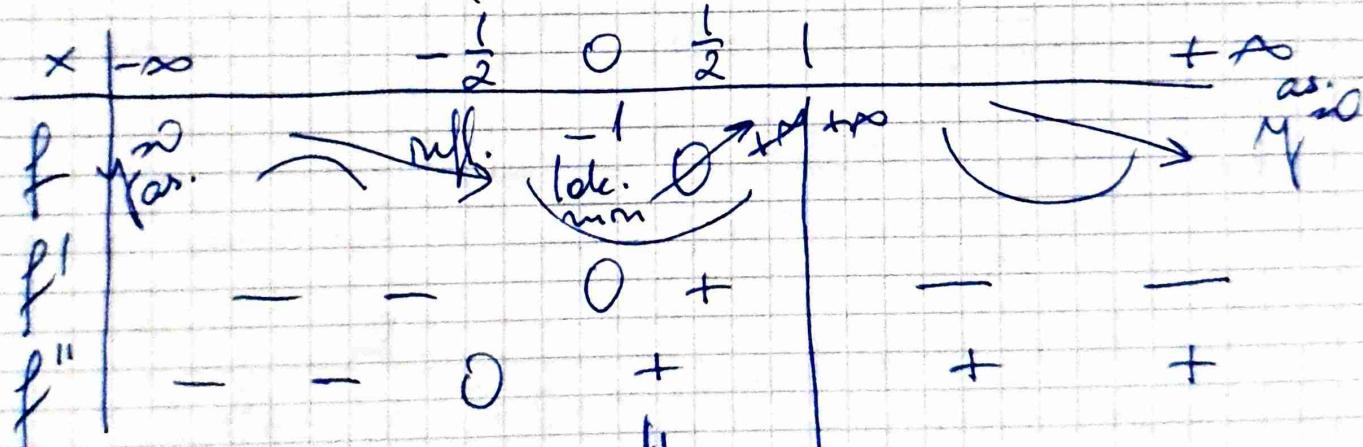
$$f'' = 0 \quad ; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$f'' > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2} \quad ; \quad f'' < 0 \quad \forall x < -\frac{1}{2} \\ x \neq 1$$

• \Rightarrow f har inflexion i $-\frac{1}{2}$

konvex i $(-\frac{1}{2}, 1)$ och i $(1, \infty)$

konkav i $(-\infty, -\frac{1}{2})$



$$\textcircled{4} \quad (a) \int x^2 \ln^2 x \, dx \quad \text{P.i.}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \int \frac{x^3}{3} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \text{P.i.} \\
 &= \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \int \frac{2x^3}{9} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27} (+c)
 \end{aligned}$$

(b) Standardsubstitutionen:

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad x = \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin x - \cos x + 5} \, dx &= \int \frac{\frac{2}{(1+t^2)}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \, dt = \\
 &= \int \frac{2}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} \, dt = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{5}/3}{5/9} \int \frac{\frac{3}{\sqrt{5}} dt}{(\frac{3(t + \frac{1}{3})}{\sqrt{5}})^2 + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{3t+1}{\sqrt{5}} (+c) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{3\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} (+c)$$

(5)

5.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} 8m \times \sin(x+\varphi) dx = \\
 &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 x \cos \varphi + \sin x \cos x \sin \varphi) dx = \\
 &= \cos \varphi \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \sin \varphi \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx = \\
 &= \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} + \\
 &+ \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{2\pi} = \\
 &= \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow M(f) = \frac{1}{2\pi} \cdot \cos \varphi \cdot \pi = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
 6. \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \\
 &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} >
 \end{aligned}$$

Bernoulli's

$$\text{dilkhet} \quad \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \frac{n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)}{n(n+2)^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1 \Rightarrow \text{följ den antagande} \\
 \text{(strängt!)}$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot e = e \quad \text{strängt antagande} \\
 \Rightarrow b_n \geq e$$