TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2022-08-26, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

===

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^5+1}}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\sin x}}; \qquad \textbf{(c)} \int_0^\infty \frac{dx}{4-x^2}\,.$$

Nedan gäller $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$ och f' är derivatan till f i $\mathbb{R}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om $f(x) < x$ för $x > 0$, så gäller $f'(x) < 1$ för $x > 0$.
(e) Om $|f(x)| < x$ för $x > 0$, så gäller $|f'(x)| < 1$ för $x > 0$.
(f) Om $f'(x) < 1$ för $x > 0$, så gäller $f(x) < x$ för $x > 0$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) \quad (5p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0_+} x^{\tan x} \quad (3p).$$

OBS! I deluppgift (a) ska båda gränsvärdena behandlas!

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(\tan x)$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx$. (3p)

5. Givet är följden

$$a_1 = \frac{1}{3+1},\ a_2 = \frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\ \ldots.$$

Visa att följden har ett gränsvärde då n går mot oändligheten. (5p)

6. Visa att varje funktion, vars definitionsmängd är symmetrisk med avseende på 0, kan framställas som summan av en jämn och en udda funktion. (5p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion i en punkt och i en mängd. (3p)

(b) Visa att funktionen sinus är deriverbar i hela sin definitionsmängd. (4p)

8.(a) Formulera analysens huvudsats (Newton-Leibniz sats). (2p)

(b) Bevisa insättningsformeln och ge ett exempel på hur den används. (5p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1 / TM1

Lösningar 26/8 - 22

1. (a) konvergent; (b) divergent; (c) divergent; (d) falskt; (e) falskt; (f) sant.

---

2. (a) $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) =$

$= "-\infty\,(\infty-(-\infty))" = "-\infty\cdot\infty" = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}$: $x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = ("\infty\cdot(\infty-\infty)")$

$$= \frac{x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{x^3\left(\cancel{x^2}+\sqrt{x^4+1}-\cancel{2}x^2\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2} =$$

$$= \frac{x^3\left(\cancel{x^4}+1-\cancel{x^4}\right)}{x\underbrace{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+1/x^4}}+\sqrt{2}\right)}_{\to 2\sqrt{2}}\cdot x^2\underbrace{\left(\sqrt{1/x^4+1}+1\right)}_{\to 2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

OBS! $x>0$, $x^2>0$ +

(b) $x^{\tan x} \overset{x>0}{=} e^{\tan x\ln x} = \left("e^{0\cdot(-\infty)}"\right)$

$= e^{\frac{\sin x}{\cos x}\ln x} = e^{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x}$

$\xrightarrow[x\to 0_+]{} e^{1\cdot 1\cdot 0} = 1$

3. $f(x) = \ln(\tan x)$

D_f : $\tan x > 0$, $x \in (k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$
$k \in \mathbb{Z}$

Nollställen : $f(x)=0 \iff \tan x = 1$

OBS! P.g.a. periodiciteten kan vi titta på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$

$\tan x = 1$ i $(0, \frac{\pi}{2})$: $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(och sen $x_k = k\pi + \frac{\pi}{4}$)

Tecken: $f(x) \gtrless 0 \iff \tan x \gtrless 1$

$f > 0$ i $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $f < 0$ i $(0, \frac{\pi}{4})$

f periodisk, eftersom tan periodisk (med period π)

Jämn/udda : nej (D_f ej symmetrisk)

$\lim_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$, eftersom $\tan x \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0_+$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = +\infty$, eftersom $\tan x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}-]{} \infty$

$\Rightarrow$ linjerna $x = 0$ & $x = \frac{\pi}{2}$ är vertikala asymptoter

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x} > 0 \text{ i } (0, \frac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow f$ växande (strängt) i $(0, \frac{\pi}{2})$

Inga lokala extrema.

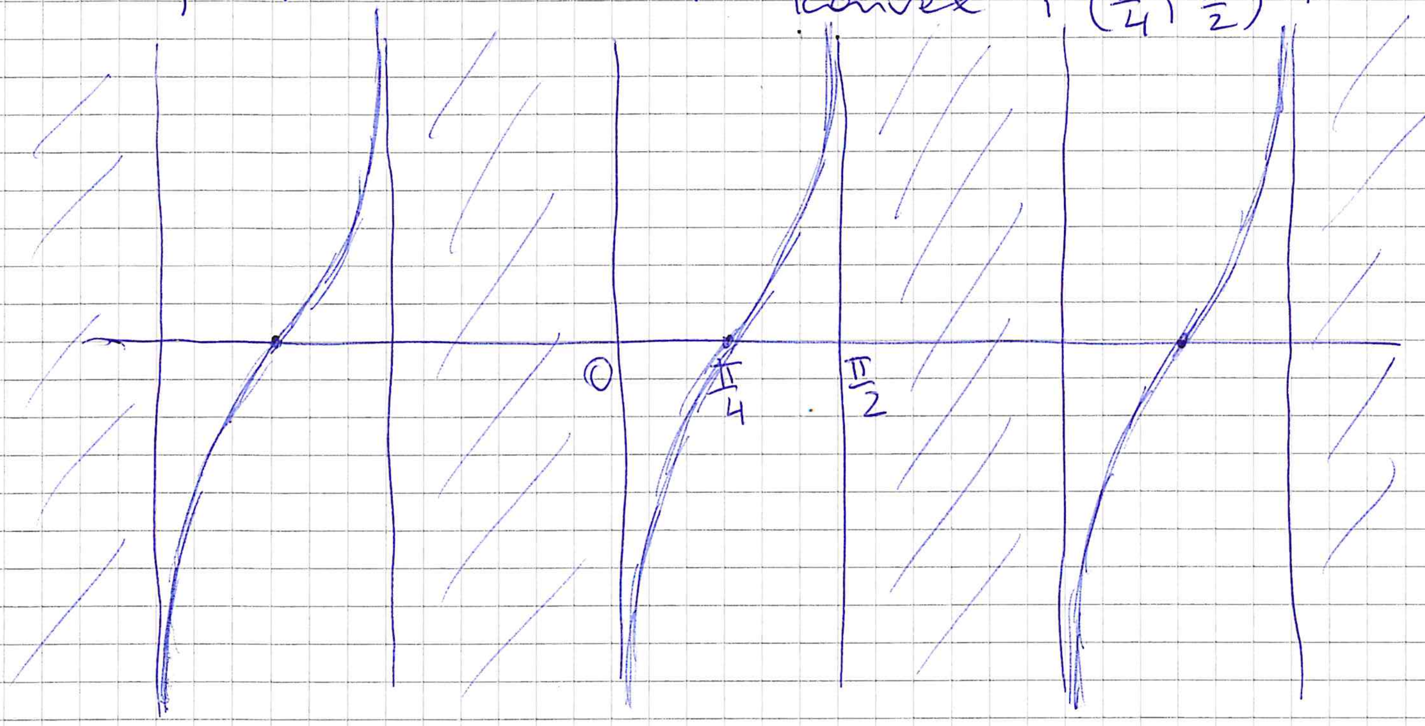
$$f''(x) = -2\cdot\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\cos 2x = -\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f''	|	$-$	0	$+$	|

f konkav i $(0, \frac{\pi}{4})$

inflexion i $\frac{\pi}{4}$

konvex i $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$



x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f	$-\infty$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	$+\infty$
f'		$+$	$f'(\frac{\pi}{4})=2$ $+$	$+$	
f''		$-$	0	$+$	

periodisk

period π

---

4. (a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(3x-1)^2+1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(3x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-\frac{1}{3})^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$(+C)$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x}\,dx =$ 4

$$= \left[\begin{array}{l|l} t = e^x & x=0 \rightsquigarrow t=1 \\ dt = e^x dx & x=1 \rightsquigarrow t=e \end{array}\right] = \int_1^e \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} s=\sqrt{t-1} & & t=1 \rightsquigarrow s=0 \\ t=s^2+1 & dt = 2s\,ds & t=e \rightsquigarrow s=\sqrt{e-1} \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{s}{s^2+1}\cdot 2s\,ds = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{(2s^2+2)-2}{s^2+1}\,ds =$$

$$= \Big[2s - 2\arctan s\Big]_0^{\sqrt{e-1}} = \underline{\underline{2\sqrt{e-1} - 2\arctan\sqrt{e-1}}}$$

5.

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1}$$

$$0 < a_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} <$$

$$< \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^{n+1}+1} > a_n$$

$\Rightarrow$ följden växande & uppåt begränsad

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{konvergent}}}$

(c) Antag att $f(x) = g(x) + h(x)$, 5

där $\underline{g}$ är jämn och $\underline{h}$ är udda.

Definitionsmängdens symmetri gör att x och $-x$ tillhör D_f samtidigt

Vi sätter in $-x$:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) =$$

$$= g(x) - h(x) \text{, enligt antagandet}$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = g(x) + \cancel{h(x)} + g(x) - \cancel{h(x)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$$

$$f(x) - f(-x) = \cancel{g(x)} + h(x) - \cancel{g(x)} + h(x)$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

Insättning visar att $g(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right)$

$= g(x)$ och $h(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) =$

$= -h(x)$,

d.v.s. $\underline{g}$ jämn och $\underline{h}$ udda,

samt att $g(x) + h(x) =$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + \cancel{f(-x)}\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - \cancel{f(-x)}\right) =$$

$$= f(x).$$