TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2022-01-05, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \qquad \textbf{(c)} \int_0^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}}.$$

Nedan gäller $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, och F är en primitiv till f i $\mathbb{R}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Funktionen g, där $g(x) = \sin(f(x))$, är periodisk i $\mathbb{R}$.
(e) Om F är periodisk i $\mathbb{R}$, så är f periodisk i $\mathbb{R}$.
(f) Om f är periodisk i $\mathbb{R}$, så är F periodisk i $\mathbb{R}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})} \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(\ln(1+2\sin x))^2} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arctan(1+\sqrt{x})$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}$. (3p)

5. Bestäm alla positiva reella tal α sådana att integralen

$$\int_0^1 \frac{\tan x - \sin x}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^\alpha}\,dx$$

är konvergent. (7p; för full poäng krävs fullständiga uppskattningar)

6. De två följderna $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, och $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, är sådana att den ena av dem är växande och den andra avtagande. Givet att $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, visa att det finns ett tal l sådant att $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p) Använd satsen för att härleda derivatan av funktionen $f(x) = \ln x$. (1p)

8. Formulera och bevisa analysens huvudsats (Newton-Leibniz sats). (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1 / TM1

Lösningar 5/1 -22

1. (a) konvergent ; (b) divergent ;
(c) divergent ; (d) falskt ;
(e) sant ; (f) falskt.

---

2. (a)
$$\frac{(1-2)+(3-4)+\ldots+((2n-1)-2n)}{n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)} =$$

$$= \frac{\overbrace{-1-1-\ldots-1}^{n \text{ ggr}}}{n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)} = \frac{-\cancel{n}^{1}\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\cancel{n}\left(\cancel{n^2}+n+\cancel{1}-\cancel{n^2}+n-\cancel{1}\right)}$$

$n\to\infty \Rightarrow n = |n|$

$$= -\frac{\cancel{|n|}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{2\cancel{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

(b)
$$\frac{1-\cos x}{(\ln(1+2\sin x))^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(\ln(1+2\sin x))^2} =$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(\ln(1+2\sin x))^2} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)(\ln(1+2\sin x))^2} = \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{2\sin x}{\ln(1+2\sin x)}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

ty $2\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

3. $f(x) = |x| e^{-x^2/2}$ (2)

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$\left(\Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f = f(0) = 0 \right)$

$f(-x) = |-x| e^{-(-x)^2/2} = f(x)$

$\Rightarrow f$ jämn

ej periodisk

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

inga vertikala asymptoter,

horisontell asymptot $y = 0$ (i $\pm\infty$)

$x > 0$: $f(x) = x e^{-x^2/2}$

$f'(x) = e^{-x^2/2} + x e^{-x^2/2} \cdot (-x) =$

$= (1 - x^2) e^{-x^2/2}$

x	0		1	
f'		$+$	0	$-$

$\Rightarrow f$ har lok. max i $x = 1$

$x < 0$: f jämn $\Rightarrow$ per symmetri f har lok. max i $x = -1$

$? \exists f'(0)$ $\quad h > 0$ $\quad \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h e^{-h^2/2} - 0}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

$h < 0$ $\quad \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-h e^{-h^2/2} - 0}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -1$

vänsterderivatan $\neq$ högerderivatan

$\Rightarrow \nexists f'(0)$

$(\Rightarrow \nexists f''(0))$

3

$x>0$: $f''(x) = -2xe^{-x^2/2} + (1-x^2)e^{-x^2/2}\cdot(-x) =$

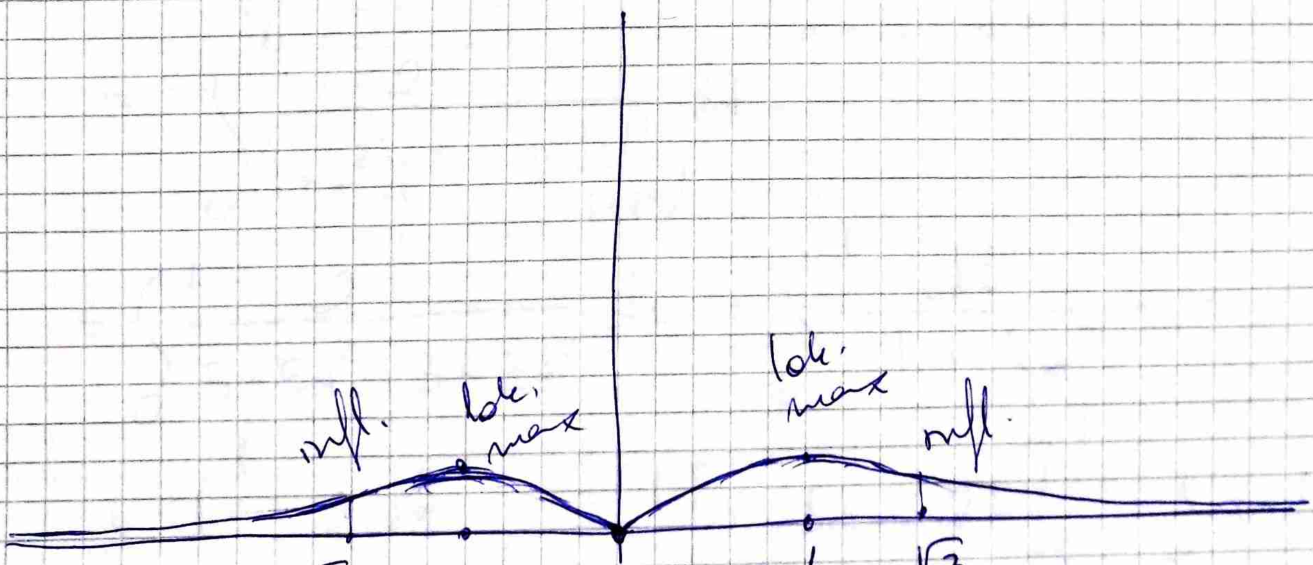
$= (x^3 - 3x)e^{-x^2/2} = x(x^2-3)e^{-x^2/2}$

x	0		$\sqrt{3}$	
f''	‖	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ f konvex för $x>\sqrt{3}$,
konkav för $x \in (0, \sqrt{3})$
inflexion: $x = \sqrt{3}$

$x<0$: inflexion för $x = -\sqrt{3}$
konkav i $(-\sqrt{3}, 0)$
konvex för $x < -\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f	as: $y=0$		infl.		lok max $1/\sqrt{e}$		lok min 0		lok max $1/\sqrt{e}$		infl.		as: $y=0$
f'		$+$			0	$-$	‖	$+$	0	$-$			
f''		$+$	0		$-$		‖		$-$		0	$+$	



4. (a) $\int \arctan(1+\sqrt{x})\,dx =$ 4

$= \begin{bmatrix} \sqrt{x}=t, & x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int 2t\arctan(1+t)\,dt =$

$\overset{p.i.}{=} t^2\arctan(1+t) - \int t^2\cdot\frac{1}{1+(1+t)^2}\,dt =$

$= t^2\arctan(1+t) - \int \frac{t^2}{t^2+2t+2}\,dt =$

$= t^2\arctan(1+t) - \int \frac{(t^2+2t+2)-2t-2}{t^2+2t+2}\,dt =$

$= t^2\arctan(1+t) - t + 2\int \frac{t+1}{(t+1)^2+1}\,dt =$

$= t^2\arctan(1+t) - t + \ln(t^2+2t+2) + C =$

$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln(x+2\sqrt{x}+2) + C$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\cos x} = \begin{bmatrix} t=\tan\frac{x}{2}; & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2\arctan t; & dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x=0: t=0 \\ x=\pi/2: t=1 \end{bmatrix}$

$= \int_0^1 \frac{2}{(1+t^2)\left(5-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,dt =$

$= \int_0^1 \frac{2}{5+5t^2-3+3t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+4t^2} =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2\,dt}{1+(2t)^2} = \frac{1}{2}\Big[\arctan 2t\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\arctan 2$

5.2 Integralen är generaliserad i 0. 5

$$\frac{\tan x - \sin x}{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)^{\alpha}} = \frac{\sin x\,(1-\cos x)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^{\alpha}}{\cos x \cdot (1+x-1+x)^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin x\,(1-\cos^2 x)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^{\alpha}}{\cos x\,(1+\cos x)\cdot 2^{\alpha} x^{\alpha}} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sin^3 x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^{\alpha}}{x^3 \cdot 2^{\alpha}\cos x\,(1+\cos x)}}}_{=\varphi_{\alpha}(x)} \frac{1}{x^{\alpha-3}}$$

$$\varphi_{\alpha}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{4} < \varphi_{\alpha}(x) < 1$ nära 0, för $0 < x < \delta_{\alpha}$

$\int_0 \frac{dx}{x^{\alpha-3}}$ konvergent omm $\alpha - 3 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 4$

$0 < \alpha < 4$: $\int_0^{\delta} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha-3}}\,dx$

$0 < \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha-3}} < \frac{1}{x^{\alpha-3}}$ $\quad \int_0^{\delta} \frac{dx}{x^{\alpha-3}}$ konvergent

$\Rightarrow$ den givna integralen konvergent för $\alpha < 4$

$\alpha > 4$: $\frac{\varphi(x)}{x^{\alpha-3}} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-3}}$ ger divergent integral i 0

$\Rightarrow$ integralen divergent för $\alpha > 4$

(6) Utan motsägelse*

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$

$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots$

(* eftersom $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$)

$a_n - b_n \leq a_{n-1} - b_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 - b_1$

$\Rightarrow$ följden $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ är avtagande och går mot 0

$\Rightarrow a_n - b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_1 \geq a_n \geq b_n$ och $a_n \geq b_n \geq b_1$
$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är avtagande och nedåt begränsad;

följden $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = L$
(ändliga)

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = l - L = 0$

$\Rightarrow L = l$

$\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$