TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2021-08-27, kl. 8:30 – 12:30.
Hjälpmedel: Alla, dock ej samarbete och konsultationer.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531; svarar på frågor i Zoom ca 10:00.
==

1. Funktionen f är deriverbar i $\mathbb{R}$. Sant eller falskt? Ge endast svar.

(a) Om f är begränsad, så är f' begränsad.
(b) Om f' är begränsad, så är f begränsad.
(c) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$.
(d) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
(e) Om $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, så gäller $\lim_{x\to-\infty} f'(x) \neq 0$.
(f) Om $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (ändligt), så gäller $\exists \lim_{x\to\infty} f(x)$ (ändligt).

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger dock minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

(a) $\lim\limits_{x\to p} (x-p)^{-1} \ln \dfrac{x}{p} \quad (p>0)$ (3p); **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} x \sqrt[3]{\sin \dfrac{1}{x^3}}$ (3p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{2x - x|x|}$. Ange gränsvärden, lokala extrema och inflexionspunkter. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $\dfrac{(x-2)\sqrt[3]{x}}{x-2+\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 1$. (3p)

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-2x} dx$, där n är ett positivt heltal. Motivera väl! (5p)

5. Bestäm antalet reella lösningar till ekvationen $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$. (5p)

6. Funktionen f är två gånger deriverbar i intervallet $[a,\infty)$. Givet att f uppfyller $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$, samt $f''(x) \leq 0$ för alla $x \in [a,\infty)$, visa att f har exakt ett nollställe i det öppna intervallet (a,∞). (4p för bevis av existens, 2p för bevis av entydighet)

7. Visa att funktionerna sin och cos är kontinuerliga i 0. (3p) Visa (direkt) att funktionen arctan är kontinuerlig i 0. (3p)

8. Funktionen $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att det finns en punkt $\xi \in [-\pi,\pi]$ sådan att

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos x \, dx = \sqrt{2}\, f(\xi). \qquad \text{(6p)}$$

(Du får använda analysens huvudsats, även kallad Newton-Leibniz sats, i beviset.)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

(1)

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 27/8 - 2021

1. (a) falskt; (b) falskt; (c) falskt; (d) sant; (e) falskt; (f) falskt.

---

2. (a) $\lim\limits_{x\to p}(x-p)^{-1}\ln\frac{x}{p} = \left[\begin{matrix} x-p=t \\ x\to p \Leftrightarrow t\to 0\end{matrix}\right]$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\frac{p+t}{p} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t}{p}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{t}{p}\right)}{\frac{t}{p}\cdot p} \longrightarrow \frac{1}{p}$

$1 \quad t\to 0$

(b) $x\sqrt[3]{\sin\frac{1}{x^3}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, ty $\underset{\text{begränsad}}{\sqrt[3]{\sin\cdots}}$, $x\to 0$

---

3. $f(x) = e^{2x-x|x|}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$, $f(x)>0$ i $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}e^{\infty}\text{"} = \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0$

inga vertikala asymptoter

horisontell asymptot i $+\infty$

i $-\infty$: $\dfrac{e^{2x+x^2}}{x} \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow$ ingen asymptot i $-\infty$

inga symmetrier

$$f'(x) = e^{2x - x|x|}\,(2 - 2|x|)$$

(se lösningarna till tenten oktober 2020)

$$= 2(1-|x|)\,e^{2x - x|x|}$$

ska redovisas

$f' = 0$ i ± 1

x	$-\infty$		-1		1		∞
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow f$ har lok. min i -1; lok. max i 1

f'': finns ej i 0

$x<0$: $f''(x) = 2e^{2x+x^2}\left(1+(1+x)(2x+2)\right) =$

$$= 2e^{2x+x^2}(\underbrace{2x^2+4x+3}_{\text{inga reella nollställen}}) > 0 \quad \forall x<0$$

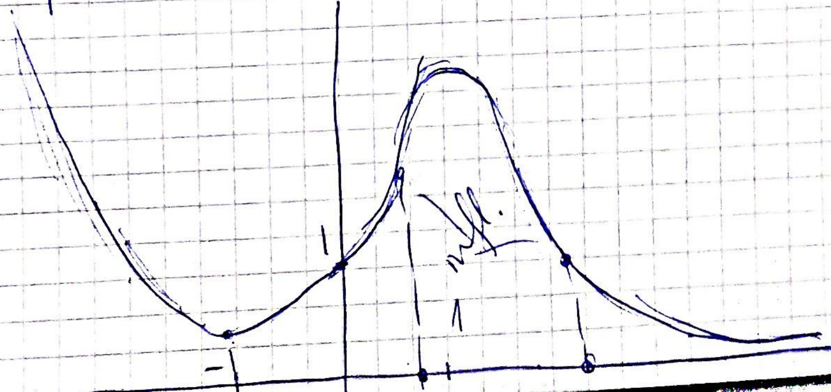
$x>0$: $f''(x) = 2e^{2x-x^2}\left(-1+(1-x)(2-2x)\right) =$

$$= 2e^{2x-x^2}(2x^2-4x+1)$$

$f''=0$: $\dfrac{2\pm\sqrt{4-2}}{2} = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

x	$-\infty$		0		$(2-\sqrt{2})/2$		$(2+\sqrt{2})/2$		$+\infty$
f''		$+$	lim=6 | lim=2	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	lok. min $1/e$	$\nearrow$	1		infl.		lok. max e		infl.	$\searrow$	0
f'		$-$	0			$+$			0			$-$	
f''		$+$		$\to 6$	| $\to 2$	$+$	0		$-$		0	$+$	



④ (a) $\int \frac{(x-2)\sqrt[3]{x}}{x-2+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Sätt $\sqrt[3]{x} = t$, $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$

$$\int \frac{(t^3-2)\cdot t\cdot 3t^2}{t^3-2+t}\,dt = \int \frac{3t^3(t^3-2)}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt$$

Standard; polynomdivision

därefter partialbråksuppdelning

$$\frac{A}{t-1}\,,\quad \frac{Bt+C}{t^2+t+2} = \frac{B\left(t+\frac{1}{2}\right)+\left(C-\frac{B}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

ger $\ln|t-1|$

ger $\ln(t^2+t+2)$ & $\arctan \frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}$

OBS! Därefter: substitution tillbaka $t = \sqrt[3]{x}$

(b) $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-2x}\,dx$ konvergent, p.g.a. att $e^{+2x} \to \infty$ snabbare än en godtycklig potens av x

$$\int_0^\infty = \lim_{p\to\infty}\int_0^p$$

$$I_{n,p} = \int_0^p x^n e^{-2x}\,dx \overset{p.i.}{=} \left[-\frac{1}{2}x^n e^{-2x}\right]_0^p + \frac{1}{2}\int_0^p nx^{n-1}e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}p^n e^{-2p} + \frac{n}{2}I_{n-1,p}$$

$p \to \infty$: $I_n = 0 + \frac{n}{2}I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2^2}I_{n-2}$

$$= \ldots = \frac{n!}{2^n}I_0$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^p = \frac{1}{2}$$

(4)

5. $P(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$

$P(0) < 0 \quad , \quad \lim_{\pm\infty} P = +\infty$

$\Rightarrow$ finns minst en reell rot till $P(x) = 0$

$P'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x =$

$= 6x(8x^2 - 7x - 1)$

nollställen: $0, \quad \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2 \cdot 8} = \frac{7 \pm 9}{16} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{8} \end{cases}$

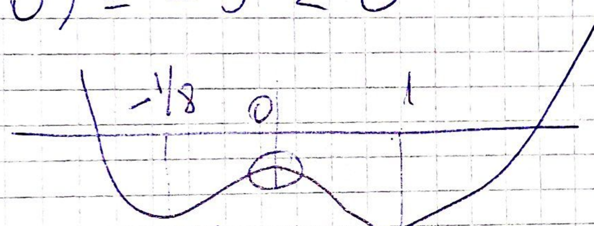
x	$-1/8$		0		1	
P'	$-\ 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ P har lok. min i $-\frac{1}{8}$ och i 1
lok. max i 0

$P(1) = 12 - 14 - 3 - 5 < 0$

$P(0) = -5 < 0$

$\Rightarrow$



lok. max < 0

$\Rightarrow$ P har två reella nollställen

---

6. Beteckna $f'(a) = B, \quad f(a) = A > 0$

$f'' \leq 0 \Rightarrow f'$ avtagande

$\Rightarrow f' \leq B$ i $[a, \infty)$, där $B < 0$

Medelvärdessatsen:

$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) \quad \forall x > a,$

där $a < \xi < x$

$\Rightarrow f(x) = A + \underbrace{f'(\xi)}_{\leq B} \underbrace{(x-a)}_{>0} \leq A + \overset{<0}{B} \underbrace{(x-a)}_{>0} \xrightarrow[x \to \infty]{} -\infty$

$f(a) = A > 0 \Rightarrow \exists$ nollställe $> a$

entydighet: $f' < 0 \Rightarrow f$ strängt avtagande

$\Rightarrow$ upprepar ej värdet 0