TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2021-01-07, kl. 14:00 – 18:00.
Hjälpmedel: Alla, dock ej samarbete och konsultationer.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531; svarar på frågor i Zoom ca 15:00 och ca 17:00.
===

1. Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en primitiv till funktionen f i $\mathbb{R}$. Sant eller falskt? Ge endast svar.

(a) Funktionen F är kontinuerlig i $\mathbb{R}$.
(b) Funktionen f är kontinuerlig i $\mathbb{R}$.
(c) Om $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
(d) Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.
(e) Om $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, så gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.
(f) Om $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) > 0$ (ändligt), så gäller $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger dock minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\textbf{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) \quad (3\text{p}); \qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to 0_+}(x|\ln x|)^x \quad (3\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^{\frac{2}{3}} e^{-t}\, dt$. Ange gränsvärden, lokala extrema och inflexionspunkter. (6p)

4.(a) Talet $1 - i$ är nollställe till polynomet $Q(x) = x^3 + ax^2 + 8x - 6$, där a är ett reellt tal. Bestäm a. (2p)

(b) Polynomet $P(x) = 2x^3 + bx^2 + x + 3$, där $b > 0$ **är ett heltal**[1], har ett nollställe som är ett heltal. Bestäm b. (2p)

5.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{x}{Q(x)}$, där Q är polynomet från uppgift 4(a), med koefficienten a bestämd enligt 4(a). (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 P(x)e^x\, dx$, där P är polynomet från uppgift 4(b), med koefficienten b bestämd enligt 4(b). (3p)

(c) Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ är konvergent. Utför alla nödvändiga uppskattningar. (4p)

6. Bestäm funktionen $f(x)$ givet att $f'(\ln x) = 1$ för $0 < x \leq 1$, $f'(\ln x) = x$ för $x > 1$, och $f(0) = 0$. (6p)

[1] Hade missats i originaltesen; rättningen har anpassats till uppgiften som den stod där.

7. Funktionerna *hyperbolisk cosinus* och *hyperbolisk sinus* definieras som följer

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att $\sinh x$ är udda. (1p)

(b) Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ("den hyperboliska ettan"). (1p)

(c) Visa att $(\sinh x)' = \cosh x$. (1p)

(d) Använd satsen om invers funktions derivata för att hitta derivatan **till inversen**[2] av $\sinh x$. (3p)

8. Funktionen $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att det finns en punkt $\xi \in [0, \pi]$ sådan att

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = 2f(\xi). \qquad \text{(6p)}$$

(Du får använda analysens huvudsats, även kallad Newton-Leibniz sats, i beviset.)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

[2] Hade missats i originaltesen; rättningen har anpassats till uppgiften som den stod där.

TMA970 Inledande matematisk analys F / TM

Lösningar 7/1 - 2021

1. (a) sant ; (b) falskt ;
(c) falskt ; (d) sant ;
(e) falskt ; (f) sant .

---

2. (a) $$1-\frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{(n-1)n}\right)\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{4}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 3}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{3}}{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{7\cdot 4}{5\cdot 6}\cdots\frac{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{(n-2)}}{\cancel{(n-1)}\cdot\cancel{n}}\cdot\frac{(n+2)\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n+1)}} =$$

$$= \frac{n+2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

(b) $$(x|\ln x|)^x = e^{x(\ln x + \ln|\ln x|)}$$

$$x\ln x \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

$$x\ln|\ln x| = \underbrace{x|\ln x|}_{=|x\ln x| \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0}\cdot\underbrace{\frac{\ln|\ln x|}{|\ln x|}}_{\xrightarrow[x\to 0_+]{} 0} \xrightarrow[x\to 0_+]{} 0$$

, eftersom $|\ln x| \xrightarrow[x\to 0_+]{} \infty$

$$\Rightarrow \left(x|\ln x|\right)^x = e^{x(\ln x + \ln|\ln x|)} \quad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow[x \to 0_+]{} e^0 = 1$$

(3.)

$D_f = \mathbb{R}$

integranden ≥ 0 i $\mathbb{R}$; > 0 i $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \forall x > 0 \\ f(x) < 0 & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \int_0^0 \text{kont. funktion} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{M \to \infty} \int_0^{-M} t^{2/3} e^{-t} \, dt =$$

$$= -\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{0} \underbrace{t^{2/3} e^{-t}}_{\to \infty,\ t \to -\infty} dt = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{N \to \infty} \int_0^N t^{2/3} e^{-t} \, dt = A \begin{smallmatrix} > 0 \\ < \infty \end{smallmatrix},$$

eftersom e^{-t} går mot 0 snabbare än en godtycklig potens, så att

$$t^{2/3} e^{-t} < t^{2/3} \cdot \frac{C}{t^{100}} \quad \text{för } t > B_C$$

och integralen är konvergent

$f'(x) = x^{2/3} e^{-x}$ enligt analysens huvudsats

$f'(x) \geq 0$ i $\mathbb{R}$; $f'(0) = 0$; $f' > 0$ i $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ f strängt växande, inga extrempunkter; terasspunkt i 0

$$f''(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} e^{-t} - x^{2/3} e^{-t} =$$

$$= x^{-\frac{1}{3}} e^{-x} \left(\frac{2}{3} - x \right)$$

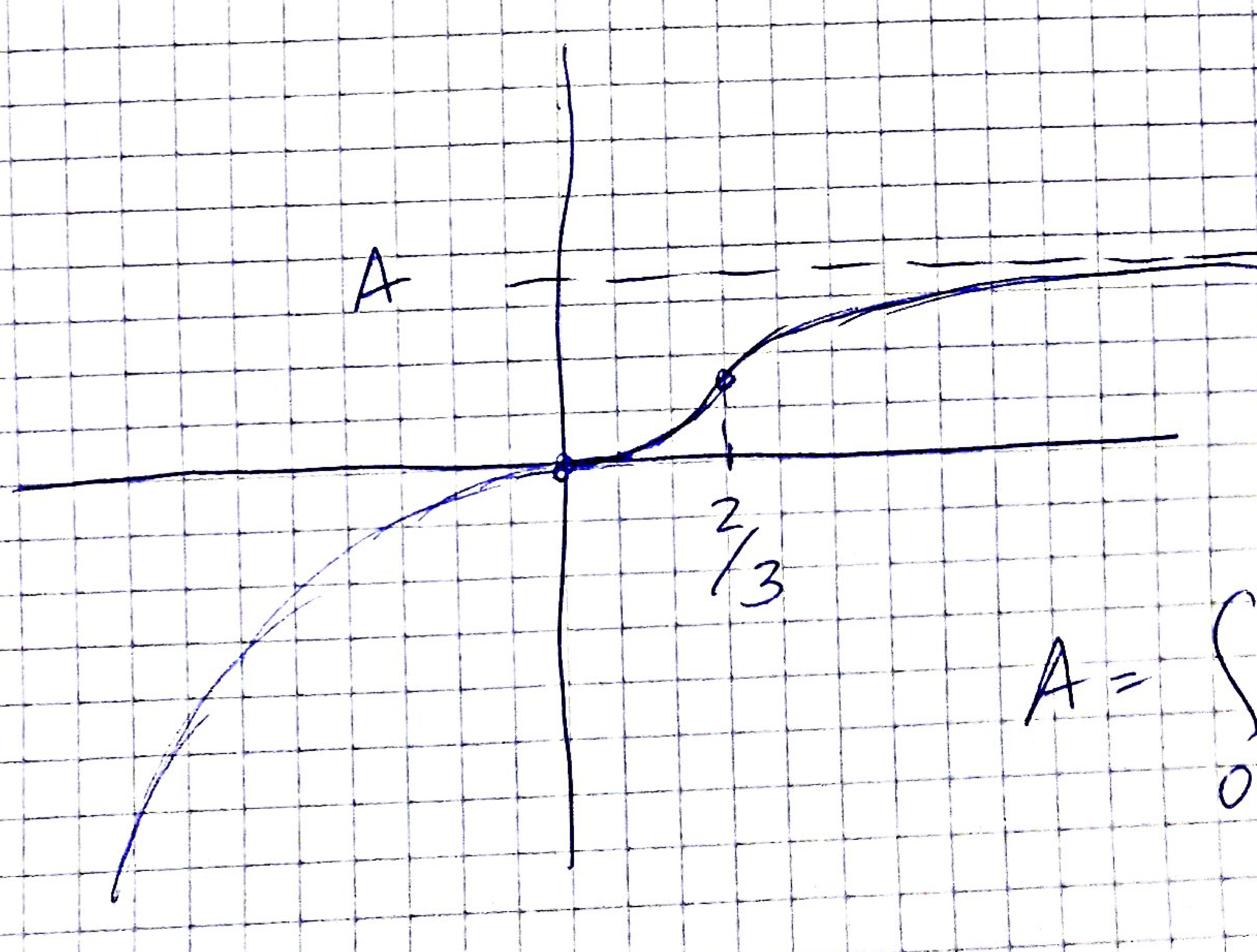
odefinierad i 0; $f'' = 0$ i $x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		0		$2/3$		∞
f''	$-$	$-$	$\vert$	$+$ $+$	0	$-$	$-$

$\Rightarrow$ f konkav för $x < 0$ o $x > \frac{2}{3}$
f konvex i $(0, \frac{2}{3})$

inflexion: 0 o $2/3$

x			0		$2/3$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	infl. 0	$\nearrow$	infl.	$\nearrow$	A
f'	$+$	$+$	0	$+$		$+$	
f''	$-$	$-$	$\vert$	$+$ $+$	0	$-$	$-$



$$A = \int_0^{\infty} t^{2/3} e^{-t} \, dt$$

4 (a) Reella koefficienter, $1-i$ nollställe

A

$\Rightarrow \overline{1-i} = 1+i$ också nollställe

$\Rightarrow$ polynomet delbart med

$$(x-1+i)(x-1-i) = x^2-2x+2$$

$$
\begin{array}{l}
(x^3+ax^2+8x-6):(x^2-2x+2) = x+(a+2) \\
-(x^3-2x^2+2x) \\
\hline
\quad (a+2)x^2+6x-6 \\
\quad -\left((a+2)x^2-2(a+2)x+2(a+2)\right) \\
\hline
\qquad \underbrace{(10+2a)x-(10+2a)}_{=0}
\end{array}
$$

$\Rightarrow 10+2a = 0 \Rightarrow a = -5$

(b) Möjliga heltalsnollställen:

$\pm 1, \pm 3$

alla koefficienter $>0 \Rightarrow 1$ o 3 omöjliga

$x_0 = -1$: $-\cancel{2}+b-\cancel{1}+\cancel{3} = 0 \Rightarrow b = 0$

men $b > 0 \Rightarrow x_0 \neq -1$

$x_0 = -3$: $-54+9b-\cancel{3}+\cancel{3} = 0$

$\Rightarrow b = 6$ ok

$P(x) = 2x^3+6x^2+x+3$

har nollställe $x_0 = 3$,

inga andra $\underline{b}$ duger

5a $Q(x) = x^3-5x^2+8x-6 =$

$= (x^2-2x+2)(x-3)$ enl. 4a

$$\frac{x}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} \quad \Big/ \cdot Q(x)$$ 5

$$x = A(x^2-2x+2) + (Bx+C)(x-3)$$

$x = 3$: $\quad 3 = A\cdot(9-6+2) = 5A$

$\quad A = 3/5$

x^2 : $\quad 0 = A + B \qquad B = -3/5$

x^0 : $\quad 0 = 2A - 3C \qquad C = 2/5$

$$\int \frac{x}{Q(x)}dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{5}\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}dx$$

$$\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| \quad (+C)$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{3(x-1)+1}{(x-1)^2+1}dx =$$

$$= 3\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}dx + \operatorname{arctan}(x-1) =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+2) + \operatorname{arctan}(x-1) \quad (+C)$$

5b $\quad \int_0^1 (2x^3+6x^2+x+3)e^x\,dx \overset{p.i.}{=}$

$$= \left[e^x(2x^3+6x^2+x+3)\right]_0^1 - \int_0^1 (6x^2+12x+1)e^x\,dx =$$

$$= 12e - 3 - \left[e^x(6x^2+12x+1)\right]_0^1 + \int_0^1 (12x+12)e^x\,dx =$$

$= 12e - 3 - 19e + 1 +$ (6)

$+ \left[e^x (12x+12)\right]_0^1 - \int_0^1 12e^x\,dx =$

$= -7e - 2 + 24e - 12 - 12\left[e^x\right]_0^1 =$

$= 17e - 14 - 12e + 12 = \underline{\underline{5e - 2}}$

5c $\quad \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\dfrac{x}{\sin x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\dfrac{x}{\sin x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{x}{\sin x} < 2$

för $0 < x < \delta_0$

för något δ_0

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} < \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\int_0 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergent

$\Rightarrow$ den givna konvergent också

---

6 $\quad$ Sätt $\ln x = t \qquad f'(t) = \begin{cases} 1 & -\infty < t \le 0 \\ e^t & 0 < t < \infty \end{cases}$

$x = 1 \Leftrightarrow t = 0$

$\Rightarrow f'(t)$ kan integreras i $(-\infty, 0]$ och $(0, \infty)$

$f(t) = \begin{cases} t + C_1 & t < 0 \\ e^t + C_2 & t > 0 \end{cases}$ (vi skriver $\le$ igen)

f måste vara kontinuerlig $\Rightarrow 0 + C_1 = 1 + C_2$

Välj s.a. $f(0) = 0$: $C_1 = C_2 + 1 = 0$

7

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ e^x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

? f deriverbar i 0

Vänsterderivata: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x - 0}{x} = 1$
$x < 0$

Högerderivata: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{e^x - 1 - 0}{x} \xrightarrow[x \to 0_+]{} 1$
$x > 0$

$\Rightarrow \quad \exists \; f'(0) = 0$