TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2020-10-28, kl. 8:30 – 12:30.
Hjälpmedel: Alla, dock ej samarbete och konsultationer.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531
==

1. Funktionen f är jämn i $\mathbb{R}$, funktionen g är udda i $\mathbb{R}$. Sant eller falskt? Ge endast svar.

(a) Funktionen $f(g(x))$ är jämn.
(b) Funktionen $g(f(x))$ är udda.
(c) Funktionen $f(x) + g(-x)$ är jämn.
(d) Funktionen $g(f(x))$ är inte inverterbar.
(e) Om g är deriverbar, så är dess derivata jämn.
(f) Om f har en primitiv funktion, så är dess primitiva udda.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\textbf{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\dots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)\quad(3p);\qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x^3-8}\quad(3p).$$

3. Bestäm a så att funktionen f blir kontinuerlig i 0, där $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$ för $x \geq 0$, och $f(x) = a - x$ för $x < 0$. Rita grafen till funktionen f. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = |x|$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 3x + 1)|\sin x|\,dx.$ (3p)

(c) Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ är konvergent. Utför alla nödvändiga uppskattningar. (4p)

5. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(x-1)\arctan(x^n),\quad x > -1.\qquad (4p)$$

6. Funktionen $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ är deriverbar i intervallet (a,∞), och uppfyller

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x),$$

där gränsvärdet finns och är ändligt. Visa att det finns en punkt $\xi \in (a,\infty)$ sådan att $f'(\xi) = 0$. (6p)

7. Talföljden

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

är konvergent och dess gränsvärde kallas e. Modifiera beviset av talföljdens konvergens för att visa att[1]

$$2,66 \leq e \leq 2,75. \qquad \text{(6p)}$$

8. Funktionen $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att det finns en punkt $\xi \in [0,2]$ sådan att

$$\int_0^2 x f(x)\, dx = 2f(\xi). \qquad \text{(6p)}$$

(Du får använda analysens huvudsats, även kallad Newton-Leibniz sats, i beviset.)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

[1] Du kan här ta för givet att talföljden är växande.

TMA970 Inledande matematisk analys F / TM

Lösningar 28/10-2020

1. $\frac{1}{2}$ (a) sant; (b) falskt;
(c) falskt; (d) sant;
(e) sant; (f) falskt.

---

2. (a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2} =$

$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} =$ [geometrisk summa, $q=\frac{1}{2}$]

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} = 1 - \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right) = 2^1 = \underline{\underline{2}}$$

(b)

$$\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x^3-8} = \frac{\left(2-\sqrt[3]{x+6}\right)\left(2^2+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)}{(x-2)(x^2+2x+4)\left(2^2+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)} =$$

$$= \frac{2^3-\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3}{(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}_{A(x)}\underbrace{\left(2^2+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)}_{B(x)}} = \frac{2\cancel{8}-x-\cancel{6}}{(x-2)A(x)B(x)} =$$

$$= -\frac{1}{(x^2+2x+4)\left(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)} \xrightarrow[x\to 2]{} -\frac{1}{12\cdot 12}$$

$$= -\frac{1}{144}$$

③ $f(x) = \begin{cases} a-x, & x<0 \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ ②

Kontinuitet:

$$\lim_{x\to 0_-}(a-x) = a = \lim_{x\to 0_+}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}\right) = = -\sqrt[3]{16} = -2\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow a = -2\sqrt[3]{2}$$

$f(x)=0$: $\begin{cases} a-x=0 \\ x<0 \end{cases}$ $\quad \underline{x = a = -2\sqrt[3]{2}}$ (<0)

$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow \underline{x=2} \\ x \geq 0 \end{cases}$ (>0)

$f(x)>0$ för $x<a<0$: $x < -2\sqrt[3]{2}$

och för

$\sqrt[3]{x^2} > \sqrt[3]{(x-4)^2} \Leftrightarrow x^2 > (x-4)^2 \Leftrightarrow x > 2 > 0.$

f varken jämn/udda eller periodisk

$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \infty$ med asymptot $y = a-x$
(f linjär för $x<0$)

$$\underbrace{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}}\xrightarrow[x\to\infty]{} \text{"}\infty-\infty\text{"}$$

$$= \frac{\overbrace{x^2-(x-4)^2}^{=8x-16}}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2(x-4)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^4}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow y=0$ asymptot i $+\infty$

3

$x < 0$: f avtagande $(f' = -1)$

$x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-4)^{-\frac{1}{3}}$$

$\nexists f'$ i $x = 4$; $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0,4$

$$\lim_{x \to 0_+} f'(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 4_-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 4_+} f'(x) = -\infty$$

$f'(x) > 0$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-4}} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x-4}} > 0 \qquad (x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x-4 > x \\ x-4 > 0 \end{cases}}_{\text{omöjligt}} \text{ eller } \begin{cases} x-4 < x \\ x-4 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f' > 0$ för $0 < x < 4$

$f' < 0$ för $x > 4$ (och $x < 0$)

x		0		4	
f'	$-$	|	$+$	|	$-$

$\Rightarrow f$ har lok. min i 0; lok. max i 4

$f''(x) = 0$ för $x < 0$

$\nexists f''$ i $x = 0$ o $x = 4$

i $(0,4)$ o $(4,\infty)$:

$$f''(x) = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(x-4)^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^4}}\right)$$

$x>0$ $f''=0$: $x^4 = (x-4)^4$

$$\Leftrightarrow |x| = |x-4|$$

$x = x-4$ omöjligt

$x = 4-x$ $\quad x = 2$

$x>0$ $f''>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^4}} < 0$

$0<\sqrt[3]{x^4}$ $\quad 0<\sqrt[3]{(x-4)^4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-4)^4} < \sqrt[3]{x^4} \Leftrightarrow (x-4)^4 < x^4$$

$$\Leftrightarrow |x-4| < |x| \quad \begin{cases} x>4 \\ 2<x<4 \end{cases}$$

$f''<0$ i $(0,2)$

$\Rightarrow f$ Impar i $(-\infty, 0)$
konkav i $(0,2)$
konvex i $(2,4)$
konvex i $(4,\infty)$

inflexion : $x=2$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f	Impar, a-x	$\searrow$	$\sqrt[3]{16}$ lok. min	$\frown$	$\nearrow$	$\cup$	$\sqrt[3]{16}$ lok. max	$\searrow$	0
f'	$-$	$-$	$-\mid\infty$	$+$	$+$		$\infty\mid-\infty$	$-$	$-$
f''	0		$-$		0	$+$		$+$	$+$

(4a) $\int |x|\,dx$ (5)

$x > 0$: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$x < 0$: $\int |x|\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \int |x|\,dx = \underbrace{\frac{x|x|}{2}}_{=F(x)} \quad x \neq 0$

$x = 0$?

- $x \to 0_+$: $\frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{x|x|-0}{x} = |x| \underset{x\to 0_+}{\to} 0$
- $x \to 0_-$: $\frac{F(x)-F(0)}{x} = |x| \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow$ F deriverbar även i 0
och $F'(0) = |0| = |x|\Big|_{x=0}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x|x|}{2}$ är primitiv
till $f(x) = |x|$ i $\mathbb{R}$

(b) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2+3x+1)\,|\sin x|\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\sin x & [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}$

Primitiv till $(x^2+3x+1)\sin x\,dx$:

$\int (x^2+3x+1)\underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'}\,dx = -(x^2+3x+1)\cos x +$

$+ \int (2x+3)\underbrace{\cos x}_{=(\sin x)'}\,dx = -(x^2+3x+1)\cos x +$

$+(2x+3)\sin x - \int 2\sin x\,dx$ $= -2\cos x + C$

$$I = \left[-(x^2+3x+1)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$ 6

$$- \left[-(x^2+3x+1)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \left(\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+3\right) - (-1+2)\right) - \left((-1+2) - \left(2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+3\right)\cdot(-1)\right) =$$

$$= \pi + \cancel{3} - 1 - 1 + \pi - \cancel{3} = 2\pi - 2$$

(c) $$|\ln(\sin x)| = \left|\sqrt{x}\,\ln(\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right| =$$

$x>0$ litet

$$= \left|\sqrt{\sin x}\,\ln\left(\left(\sqrt{\sin x}\right)^2\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{\sin x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right| =$$

$$= \left|\underbrace{2\sqrt{\sin x}\,\ln\left(\sqrt{\sin x}\right)}_{\xrightarrow{x\to 0_+} 0}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x}{\sin x}}}_{\xrightarrow{x\to 0_+} 1}\right|\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < |\ln(\sin x)| < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{for } x \text{ nära } 0_+$$

$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konvergent

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ absolutkonvergent

$\Rightarrow$ konvergent

---

5. $x>1$: $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\arctan(x^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x-1)\arctan(x^n) = \frac{\pi}{2}(x-1)$$

for $x>1$

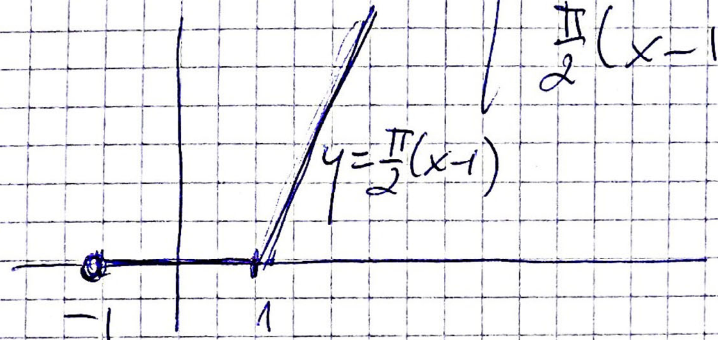
$x=1$: $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$|x|<1 \Rightarrow |x^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \arctan(x^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & -1<x\le 1 \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & x>1 \end{cases}$$



---

6. Låt $l = \lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

(1) $f\equiv l$ i $(a,\infty) \Rightarrow f'\equiv 0$ i (a,∞)

(2) $\exists x_1\in(a,\infty) : f(x_1)\neq l$

Utan inskränkning

$f(x_1) > l$

Beteckna $2\varepsilon_0 = f(x_1)-l$

$\exists \delta_0>0 : \quad f(x)<l+\varepsilon_0$ i $(a, a+\delta_0)$

$\exists A_0 : \quad f(x)<l+\varepsilon_0$ i (A_0, ∞)

$l+\varepsilon_0 = f(x_1)-\varepsilon_0$

$\Rightarrow f(x)\le f(x_1)-\varepsilon_0$ i $(a, a+\delta_0]\cup[A_0,\infty)$, ty f kontinuerlig, eftersom den är deriverbar

$\Rightarrow f(a+\delta_0)\le f(x_1)-\varepsilon_0, \quad f(A_0)\le f(x_1)-\varepsilon_0$

f kontinuerlig

$\Rightarrow \exists \max f$ i $[a+\delta_0, A_0]$, $\max f \ge f(x_1)$

$\Rightarrow$ max antas i en inre pkt $\xi \Rightarrow f'(\xi)=0$