TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2020-01-09, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Andreas Petersson, tel. 5325, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}; \qquad \textbf{(c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,.$$

Nedan gäller $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f är deriverbar i (a,b) och $x_0 \in (a,b)$. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om f har lokalt extremum i x_0, så gäller $f'(x_0) = 0$.
(e) Om $f'(x_0) = 0$, så har f lokalt extremum i x_0.
(f) Om $f'(x_0) \neq 0$, så har f inte lokalt extremum i x_0.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena ($m, n \in \mathbb{N}$; L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(mx+1)}{\ln nx} \quad (3\text{p}); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 2x} \quad (3\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2(x^2+2)}$. (4p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx\,.$ (3p)

5. Visa att integralen

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

är konvergent för $1 < \alpha < 2$. Utför alla nödvändiga uppskattningar. (6p)

6. Ett polynom p sägs ha ett dubbelt nollställe i punkten x_0 om $p(x) = (x-x_0)^2 q(x)$, där q är ett polynom och $q(x_0) \neq 0$. En två gånger deriverbar funktion sägs ha ett dubbelt nollställe i punkten x_0 om $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, medan $f''(x_0) \neq 0$. Visa att de två definitionerna är ekvivalenta för polynom. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p) Använd satsen för att härleda derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. (1p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 9/1 -20

1. (a) konvergent; (b) divergent;
(c) konvergent; (d) sant;
(e) falskt; (f) sant.

---

2. (a)

$$\frac{\ln(nx+1)}{\ln nx} = \frac{\ln x + \ln\left(n + \frac{1}{x}\right)}{\ln x + \ln n} =$$

$x \to \infty$
$\Rightarrow x \neq 0,$
$x > 0$

$$= \frac{1 + \dfrac{\ln\left(n + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}{\underbrace{\ln x}_{\to \infty}}}{1 + \dfrac{\ln n}{\underbrace{\ln x}_{\to \infty}}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

(b)

$$\frac{\arctan 3x}{\sin 2x} = \frac{\arctan 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{\arctan 3x}{\tan(\arctan 3x)} \cdot \frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{3}{2} \cos(\underbrace{\arctan 3x}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}) \cdot \frac{\overbrace{\arctan 3x}^{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}}{\sin(\arctan 3x)} \cdot \frac{2x}{\sin 2x}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$③\quad f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \qquad D_f \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$\triangle\!2$

$$\sqrt{x}+1 \geq 1 \text{ i } D_f \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ i } D_f$$

$$f > 0 \text{ i } (1, \infty)$$

$$f < 0 \text{ i } (0, 1)$$

ej jämn/udda, ej periodisk

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \text{“}\frac{2}{-0}\text{”} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \text{“}\frac{2}{+0}\text{”} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

$\Rightarrow$ vertikal asymptot $x=1$

horisontell asymptot $y=1$ (i ∞)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\cancel{\sqrt{x}}-1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\cancel{\sqrt{x}}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} < 0 \text{ i } (0,1) \text{ och } (1, \infty)$$

$$\left(\lim_{x \to 0+} f'(x) = -\infty \right)$$

$\rightarrow f(x)$ avtagande i D_f

$$f''(x) = +\frac{1}{x(\sqrt{x}-1)^{\cancel{4}3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^{\cancel{2}} + \sqrt{x} \cdot \cancel{2}(\cancel{\sqrt{x}-1}) \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}\left(\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}\right) =$$

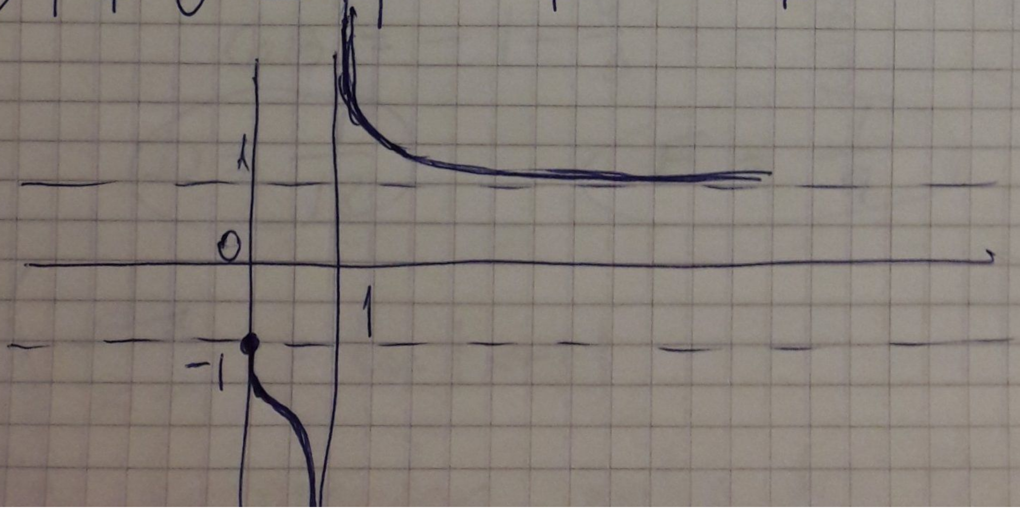
$$= -\frac{-3\sqrt{x}+1}{2x^{3/2}(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{3\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}$$

nämnaren $\begin{cases} <0 & \text{i } (0,1) \\ >0 & \text{i } (1,\infty) \end{cases}$

täljaren $\begin{cases} <0 & \text{i } (0,\frac{1}{9}) \\ >0 & \text{i } (\frac{1}{9},1) \\ >0 & \text{i } (1,\infty) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{lll} f''>0 & \text{i } (0,\frac{1}{9}) & (f \text{ konvex}) \\ f''(\frac{1}{9})=0 & & (\text{inflexion}) \\ f''<0 & \text{i } (\frac{1}{9},1) & (f \text{ konkav}) \\ f''>0 & \text{i } (1,\infty) & (f \text{ konvex}) \end{array}\right.$$

x	0		$\frac{1}{9}$		1		∞
f	-1	$\searrow$	infl.	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1
f'	$-\infty$		$-$			$-$	$-$
f''	$+$		0	$-$		$+$	$+$



4. (a)

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

[4]

$$x = A(x-2)^2(x^2+2) + B(x-1)(x-2)(x^2+2) + C(x-1)(x^2+2) + (Dx+E)(x-1)(x-2)^2$$

$x=1$: $1 = 3A$ $\quad A = \frac{1}{3}$

$x=2$: $2 = 6C$ $\quad C = \frac{1}{3}$

x^4 : $0 = A + B + D$

x^0 : $0 = 8A + 4B - 2C - 4E$

x^1 : $1 = -8A - 6B + 2C - 4D + 8E$

$$\left|\begin{array}{ll} B + D = -\frac{1}{3} & D = -\frac{1}{3} - B \\ B - E = -\frac{1}{2} & E = B + \frac{1}{2} \\ -6B - 4D + 8E = 3 & \end{array}\right.$$

$$-6B + \frac{4}{3} + 4B + 8B + 4 = 3$$

$$6B = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3} \qquad B = -\frac{7}{18}$$

$D = \frac{1}{18}$ $\qquad E = \frac{1}{9}$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|$$

(alla konstanter väljs till 0)

5

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{\left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{9}\right)dx}{x^2+2} = \frac{1}{18}\int \frac{x+2}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{36}\int \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{18}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{36}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{18}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$$

(b) $$\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx = \int_0^1 x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\,dx =$$

$$= \left[x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 e^{-2x}\cdot \cancel{2}x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx =$$

$$= -e^{-2} - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}$$

5. Vi måste visa konvergens i 0 och i ∞.

6

I ∞: $\frac{\arctan x}{x^\alpha} > 0$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\arctan x}{x^\alpha} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^\alpha}$$

$\Rightarrow$ enligt jämförelsekriteriet är integralen konvergent i ∞ $\forall \alpha > 1$.

I 0: $(\arctan x \xrightarrow[x \to 0]{} 0)$

$$0 < \frac{\arctan x}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{\arctan x}{(\tan(\arctan x))^\alpha} < \frac{\tan(\arctan x)}{(\tan(\arctan x))^\alpha} =$$

$$= \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

$\Rightarrow$ enligt jämförelsekriteriet är integralen konvergent i 0 $\forall \alpha$: $\alpha - 1 < 1$, d.v.s. $\alpha < 2$

$\Rightarrow$ integralen konvergent $\forall \alpha$: $1 < \alpha < 2$

<u>Anmärkning</u>: Integralen är divergent för alla andra reella α.

6. (i) $p(x) = (x-x_0)^2 q(x)$,

$q(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow p(x_0) = 0$

$p'(x) = 2(x-x_0)q(x) + (x-x_0)^2 q'(x)$

$\Rightarrow p'(x_0) = 0$

$p''(x) = 2q(x) + 2(x-x_0)q'(x) +$
$+ 2(x-x_0)q'(x) + (x-x_0)^2 q''(x)$

$\Rightarrow p''(x_0) = 2q(x_0) + 0 \neq 0$

(ii) $p(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ enligt faktorsatsen för polynom

$p(x) = (x-x_0)p_1(x)$

$p'(x) = p_1(x) + (x-x_0)p_1'(x)$

$p'(x_0) = 0 \Rightarrow p_1(x_0) + 0 = 0$

$\Rightarrow p_1(x) = (x-x_0)q(x)$

$\Rightarrow p(x) = (x-x_0)^2 q(x)$

$p''(x) = 2q(x) + 4(x-x_0)q'(x) + (x-x_0)^2 q''(x)$

$\Rightarrow \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{p''(x_0)} = 2q(x_0) + 0$

$\Rightarrow q(x_0) \neq 0$