TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2019-10-30, kl. 8:30 – 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}; \qquad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}; \qquad \textbf{(c)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{8-x^3}}.$$

$$\textbf{(d)} \int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}dx; \qquad \textbf{(e)} \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx; \qquad \textbf{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx;$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right) \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+6x+2}}{1-x^2} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x - 2\arctan x$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$. (3p)

5. Givet är funktionen $f(x) = 1 + x^m(1-x)^n$, där m och n är positiva heltal. Utan att beräkna $f'(x)$, visa att f' har minst ett nollställe i intervallet $(0,1)$. (5p)

6.(a) Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$. Om f inte är konstant och $\max_{x\in[a,b]} f(x) = M$, visa att

$$\int_a^b f(x)dx < M(b-a). \qquad (6p)$$

(b) Ge ett exempel som visar att påståendet inte behöver vara sant om f inte är kontinuerlig. (2p)

7. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens (Newton-Leibniz) huvudsats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 30/10-19

1 (a) divergent; (b) konvergent;
(c) konvergent; (d) divergent;
(e) konvergent; (f) konvergent.

---

2 (a) Sätt $t = \frac{1}{x}$, $x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0_+$

$$x^2\left(1-\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right) = \frac{1-\sqrt{\cos t}}{t^2} = \frac{1-\cos t}{t^2\left(1+\sqrt{\cos t}\right)} =$$

$$= \frac{1-\cos^2 t}{t^2\left(1+\sqrt{\cos t}\right)(1+\cos t)} = \frac{\sin^2 t}{t^2\left(1+\sqrt{\cos t}\right)(1+\cos t)},$$

$$\xrightarrow[t\to 0_+]{} 1 \cdot \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

(b) $$\frac{\sqrt{2x^2+3x+4} - \sqrt{x^2+6x+2}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{2x^2+3x+4 - x^2-6x-2}{(1-x^2)\left(\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+6x+2}\right)} =$$

$$= \frac{x^2-3x+2}{(1-x)(1+x)\left(\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+6x+2}\right)} = \frac{(x-1)(x-2)}{\dots} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}(2-x)}{\cancel{(1-x)}(1+x)\left(\sqrt{2x^2+3x+4}+\sqrt{x^2+6x+2}\right)} \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \frac{1}{12}$$

---

3. $f(x) = x - 2\arctan x$

$D_f = \mathbb{R}$, f udda

Nollställen: $f(0) = 0$

Finns det fler? $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = "\infty - \pi" = \infty$

$\Rightarrow \exists$ (minst) ett nollställe i $(1,\infty)$

(och likaså i $(-\infty,-1)$)

Asymptot i ∞:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2\arctan x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

$$f(x) - x = -2\arctan x \xrightarrow[x\to\infty]{} -\pi$$

$\Rightarrow y = x - \pi$ sned asymptot i ∞

($y = x + \pi$ —— " —— i $-\infty$)

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$f' = 0$ för ± 1

x	0		1	
f'	-1	$-$	0	$+$

3

$$f''(x) = \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3} + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$f'' = 0$ i $x = 0$; f'' byter tecken i 0

$\Rightarrow$ f avtagande i $(0, 1)$

f växande i $(1, \infty)$

f konvex i $(0, \infty)$

f konkav i $(-\infty, 0)$

x	$-\infty$		x_1		-1		0		1		x_2		$+\infty$
f	$y=x+\pi$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$ $f_{max}>0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$ $f_{min}<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$y=x-\pi$ $+\infty$
f'		$+$	$+$		0	$-$	-1	$-$	0		$+$		$+$
f''		$-$		$-$			0		$+$		$+$		

f (strängt) avtar från 0 till $1-\frac{\pi}{2}$ i $[0,1]$

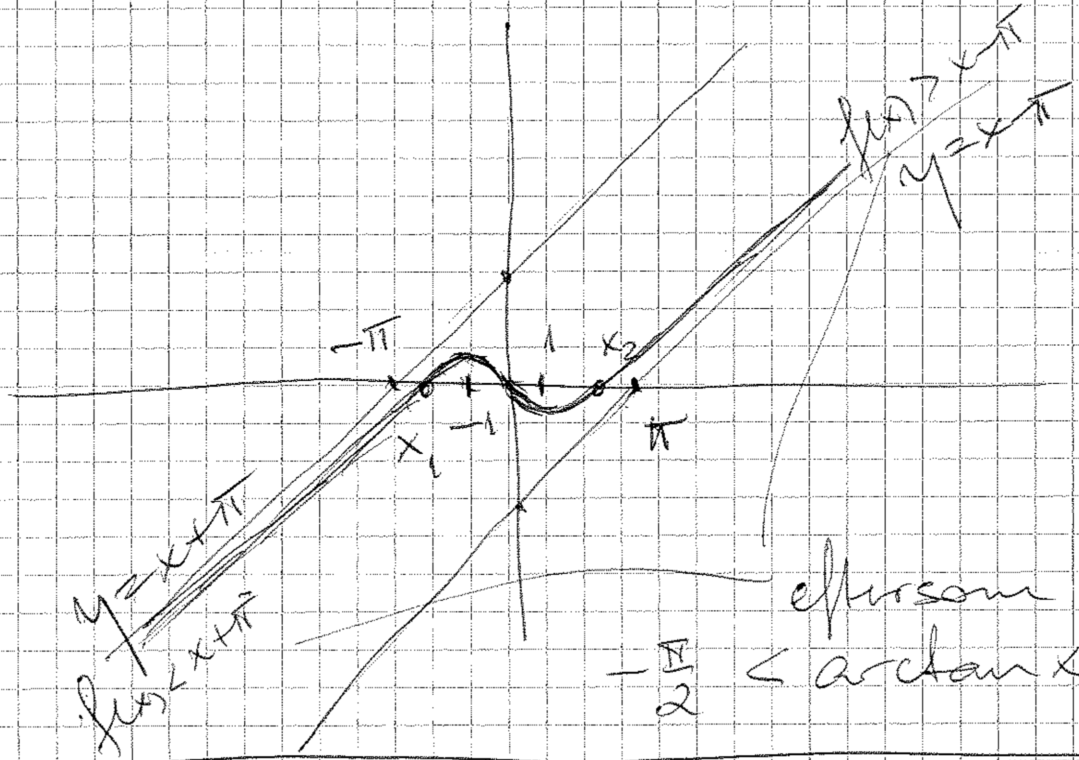
$\Rightarrow$ enda nollstället i $[0,1]$ är 0

f växer (strängt) från $1-\frac{\pi}{2}$ till ∞ i $[1,\infty)$

$\Rightarrow$ $\exists$ exakt ett nollställe $x_2 \in (1,\infty)$

$\Rightarrow$ $\exists$ exakt ett nollställe $x_1 = -x_2$ i $(-\infty, -1)$

(eftersom f är udda och grafen är symmetrisk m.a.p. 0)



eftersom $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

---

4. (a)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\cdot 2 \arcsin\frac{x-1}{2}$$
$$(C=0)$$

(b)
$$\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ x=4 \Leftrightarrow t=2 \end{array}\right\}$$
$$= \int_0^2 \sqrt{2-t}\cdot 2t\,dt = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2-t} = u \\ t = 2-u^2 \end{array}\right|$$
$$\left.\begin{array}{l} dt = -2u\,du \\ t=0 \Leftrightarrow u=\sqrt{2} \\ t=2 \Leftrightarrow u=0 \end{array}\right\} = \int_{\sqrt{2}}^0 u\cdot 2(2-u^2)\cdot(-2u)\,du$$
$$= 4\int_0^{\sqrt{2}} (2u^2-u^4)\,du = 4\left[\frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

5

5. f är deriverbar i $(0,1)$ och kontinuerlig i $[0,1]$

$$f(0) = f(1) = 1$$

$\Rightarrow$ enl. Rolles sats $\exists\, \xi \in (0,1)$:

$$f'(\xi) = 0$$

---

6. (a) $f \not\equiv \text{const}$ i $[a,b]$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) < M$$

Sätt $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(M - f(x_0)) > 0$

f kontinuerlig $\Rightarrow \exists\, \delta_0 > 0$:

$$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap [a,b]$$

$$\underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x) < \underbrace{f(x_0) + \varepsilon_0}_{= \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} M \,\le}$$

Men $f(x_0) < M$, alltså

$$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap [a,b] \qquad f(x) \overset{\le}{<} M$$

Mängden $(x - \delta_0, x_0 + \delta) \cap [a,b] = I$ är ett intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx + \int_{[a,b]\setminus I} f(x)\,dx \le$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x_0)+M\right)}_{<M} \cdot \text{längden av } I +$$

$$+ M \cdot \text{längden av resten av } [a,b]$$

$$< M\ (b-a)$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq \frac{1}{2}, \quad x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$
