TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2019-08-30, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jimmy Aronsson, ankn. 5325, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
===

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^6+1}}$; **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\ln(1-x)\,dx$; **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1-x)}\,\ln(1-x)\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-x^2}}{1-x}\,dx$; **(e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{|x-1|}}\,dx$; **(f)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^4-2x^2+1}\,dx$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ (3p); **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ (3p).

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \cos^2\sqrt{x}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}\,dx$. (3p)

(**OBS!** Det ska framgå hur koefficienterna i (b)-uppgiften beräknas, men man behöver inte slutföra räkningarna; i slutet räcker det att sätta in gränserna i resultatet för en av "delintegralerna".)

5. Visa att olikheten

$$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$$

gäller för alla reella x. (6p)

6. Givet är ett polynom $p(x)$ med reella koefficienter, $\deg p = n > 0$, vars alla nollställen är reella. Visa att p:s derivator $p'(x), \dots, p^{(n-1)}(x)$ också har enbart reella nollställen. (6p)

7.(a) Ge definitionen för att funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0. (2p)
(b) Ge definitionen för att funktionen f är deriverbar i punkten x_0. (2p)
(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i den punkten. (4p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F/TM1

Lösningar 30/8 – 19

1. (a) konvergent; (b) konvergent; (c) konvergent; (d) konvergent; (e) konvergent; (f) divergent.

---

2. (a) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = e^{(2x-1)\ln\frac{x+1}{x-2}} = e^{(2x-1)\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)} = e^{(2x-1)\cdot\frac{3}{x-2}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x-2}\right)}{3/(x-2)}} =$

$$= e^{\frac{6x-3}{x-2}\cdot\frac{\ln(1+3/(x-2))}{3/(x-2)}} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{6\cdot 1} = e^{6} \quad \left(\text{eftersom } \frac{3}{x-2} \xrightarrow[\infty]{} 0\right)$$

(b) $$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2})^2 - \left(\sqrt{1+\cos x}\right)^2}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)} =$$

$$= \frac{2-1-\cos x}{(1-\cos^2 x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \frac{\cancel{1-\cos x}\ 1}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

---

3. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ $\quad D_f = \{x \geq 0\}$

$f = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ $\Big|$ $f > 0$ för $x > 3$, $f < 0$ för $0 < x < 3$

ej periodisk ; inga symmetrier $\triangle\!\!\!2$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{"}\infty \cdot \infty\text{"} = \infty$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x-3}{x}\sqrt{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \Rightarrow$ ingen asymptot i ∞

$f'(x) = \sqrt{x} + (x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \{x>0\}$

$f' = 0$: $\sqrt{x} + (x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} = 0$ för $x = 1$

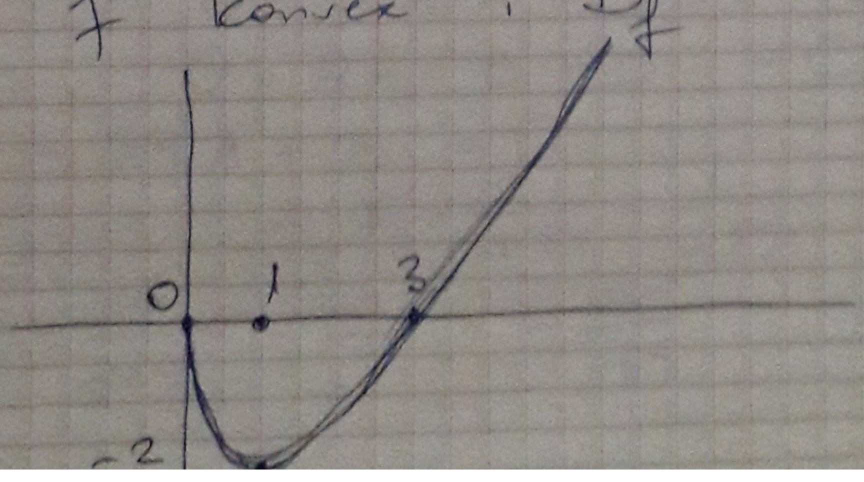
x	0		1	
f'	$-\infty$	$-$	0	$+$

f har lok. min i $x=1$, $f(1) = -2$

$f''(x) = \frac{3\cdot 2\sqrt{x} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\cdot 3(x-1)}{4x} =$

$= \frac{6x - 3(x-1)}{4x\cdot\sqrt{x}} = \frac{3x+3}{4x\sqrt{x}} > 0$ för $x>0$

$\Rightarrow f$ konvex i D_f



3

4 (a) $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{matrix}\sqrt{x} = t, & x = t^2 \\ dx = 2t\,dt\end{matrix}\right] =$

$= \int \cos^2 t \cdot 2t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\cdot 2t\,dt =$

$= \frac{t^2}{2} + \int t\cos 2t\,dt = (\text{p. i.})$

$= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{2}\int 1\cdot\sin 2t\,dt =$

$= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t \quad (+C) =$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x} \quad (+C)$

(b) $\frac{x}{(x-2)^2(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{\underbrace{x^2+4x+5}_{=(x+2)^2+1}}$

$x = A(x-2)(x^2+4x+5) + B(x^2+4x+5) +$
$+ (Cx+D)(x-2)^2$

$x=2$: $2 = 0 + 17B + 0 \Rightarrow B = \frac{2}{17}$

x^3 : $0 = A + 0 + C$

x^0 : $0 = -10A + 5B + 4D$

x^2 : $0 = 2A + B + D - 4C = 6A + B + D$

$-34A + B = 0$

$\Rightarrow A = \frac{2}{17\cdot 34} = \frac{1}{289} = -C$

$D = \frac{10}{289} - \frac{10}{17} = -\frac{160}{289}$

4

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2| \quad (+C)$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} \quad (+C)$$

$$\int \frac{Cx+D}{(x+2)^2+1}\,dx = \int \frac{C(x+2)}{(x+2)^2+1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{D-2C}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} C \ln(x^2+4x+5) + (D-2C)\arctan(x+2)$$

$$(+\text{const})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

5. $f(x) = 1 + x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = 1 + 0 - 1 = 0$

$$f'(x) = \cancel{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \cancel{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}$$

$x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f \text{ växande för } x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ för } x \geq 0$$

$x \leq 0 \Rightarrow (1-x)^2 \geq 1+x^2$ (5)

$\Rightarrow |1-x| = 1-x \geq \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} \leq 1$

$\Rightarrow \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ för $x \leq 0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f \text{ avtagande för } x \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq 0$ för $x \leq 0$

---

6. Beviset är induktivt. Här är steget från p till p':

Om alla p:s nollställen är olika bildar de $\underline{n}-1$ intervall av typen $(x_1, x_2), (x_2, x_3) \ldots (x_{n-1}, x_n)$. Betrakta ett sådant intervall.

$p(x_k) = p(x_{k+1}) = 0 \Rightarrow \exists\, \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ s.a. $p'(\xi_k) = 0$

Vi får $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1}$, som alla är reella nollställen till p'. Men $\deg p' = n-1$, alltså är detta alla dess nollställen.

Om x_k är multipel med multiplicitet m för p, så är x_k nollställe för p' med multiplicitet $m-1$, vilket ersätter nollställena i de intervall som "fattas" (där vänster- och högeranden sammanfaller).