TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2019-01-09, kl. 14:00 – 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Edvin Wedin, ankn. 5325, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_{100}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}; \qquad \textbf{(b)} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}; \qquad \textbf{(c)} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{|x|};$$

$$\textbf{(d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{-x}+x^2} dx; \qquad \textbf{(e)} \int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx; \qquad \textbf{(f)} \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena ($m, n \in \mathbb{N}$; OBS! L'Hospitals regel får ej användas.)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\left(1+\frac{m}{x}\right)^n - \left(1+\frac{n}{x}\right)^m \right) \quad \text{(3p)}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{(3p)}.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (2+x^2)e^{-x^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_1^2 x \arccos \frac{1}{x}\, dx\,.$ (3p)

5. Visa att funktionerna $f(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$ och $g(x) = \arctan x$ har samma derivata *(i)* i intervallet $(-\infty, 1)$ och *(ii)* i intervallet $(1, \infty)$, och härled sambandet mellan funktionerna f och g. (6p)

6. Visa att talföljden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, där

$$x_n = \frac{1000^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

har ett största element, och bestäm $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. (6p)

7.(a) Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

(b) Använd satsen för att härleda derivatan av $f(x) = \arctan x$. (2p)

8.(a) Formulera och bevisa satsen om partiell integration för primitiva funktioner. (4p)

(b) Ge exempel på fyra olika typer av funktioner, vilkas primitiva hittas med hjälp av partiell integration. (2p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1 / TM1

Lösningar 9/1 - 2019

1. (a) konvergent; (b) divergent; (c) divergent; (d) divergent; (e) konvergent; (f) konvergent.

---

2. (a) Sätt $t = \frac{1}{x}$

$x \to \infty \iff t \to 0_+$

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{(1+mt)^n - (1+nt)^m}{t^2} = (\text{för } n, m \geq 2)$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{n \cdot mt} + \frac{n(n-1)}{2} m^2 t^2 + \binom{n}{3} m^3 t^3 + \ldots + t^n - \cancel{1} - \cancel{m \cdot nt} - \frac{m(m-1)}{2} n^2 t^2 - \binom{m}{3} n^3 t^3 - \ldots - t^m\right)}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \left(\frac{n(n-1)}{2} \cdot m^2 - \frac{m(m-1)}{2} n^2\right) \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} +$$

$$+ \lim_{t \to 0_+} t \left(\begin{matrix}\text{ändligt antal} \\ \text{termer}\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} m^2 - \frac{m(m-1)}{2} n^2 = \frac{\cancel{m^2n^2} - m^2 n - \cancel{m^2n^2} + mn^2}{2}$$

$$= \frac{mn(n-m)}{2}$$

2

$m, n \geq 1$: egentligen ingen skillnad, samma svar

(Om man anser att $0 \in \mathbb{N}$: om ngt av talen m, n är 0, så är funktionen identiskt $= 0$.)

(b) $(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + (e^x - 1 + x)\right)^{\frac{1}{x}} =$

$$= \left(\left(1 + \underbrace{(e^x - 1 + x)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}\right)^{\frac{1}{e^x - 1 + x}}\right)^{\frac{e^x - 1 + x}{x}}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} e^{1+1} = e^2$$

(p.g.a. kontinuitet)

---

3. $f(x) = (2 + x^2) e^{-x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde)

f jämn

$y = 0$ horisontell asymptot i $\pm\infty$

$f'(x) = (\cancel{2x} - \cancel{4}2x - 2x^3) e^{-x^2} =$

$= -2x(1 + x^2) e^{-x^2}$

$f'(x) = 0$ för $x = 0$

x		0	
f'	$+$	0	$-$

$\Rightarrow f$ har lok. max i 0

$$f''(x) = (-2 - 6x^2 + 4x^2 + 4x^4)e^{-x^2} =$$
$$= (4x^4 - 2x^2 - 2)e^{-x^2} =$$
$$= 2(2(x^2)^2 - x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$f'' = 0: \quad (x^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, \ \cancel{-\tfrac{1}{2}}$$

$(x^2 \geq 0)$

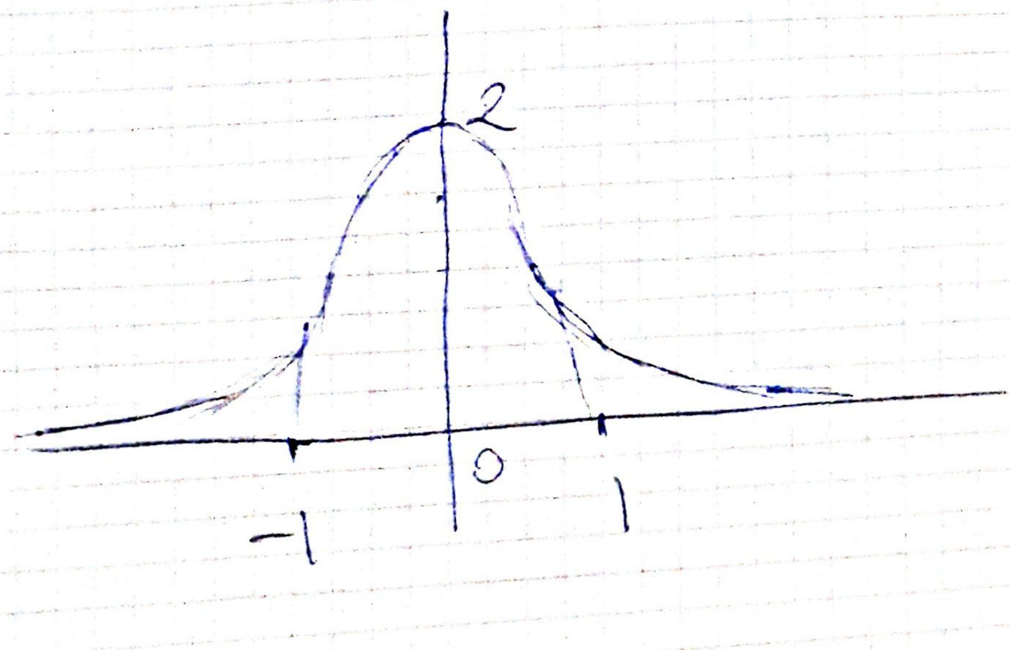
$\Rightarrow f'' = 0$ för $x = \pm 1$

x	0		1		∞
f''		$-$	0	$+$	

(räcker, p.g.a. symmetri)

$\Rightarrow f$ har inflexion i $(\pm 1, f(\pm 1))$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$y=0$	$\nearrow$	infl.	$\nearrow$	2 max	$\searrow$	infl.	$\searrow$	$y=0$
f'		$+$	$+$		0	$-$		$-$	
f''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	



(4.) (a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}$

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$

$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2$$

$x=2$: $1 = 0 + B + 0 \Rightarrow B = 0+1 = 1$

$x=0$: $1 = -10A + 5B + 4D$

x^3 : $0 = A + C$

x^2 : $0 = -6A + B - 4C + D$

$$\begin{cases} 1 = -10A + 5 + 4D \\ 0 = -6A + 1 + 4A + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10A + 4D = -4 & (-1) \\ -2A + D = -1 & \cdot 5 \end{cases} +$$

$$D = -1 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0$$

(Kan göras kortare om man ser att f är en funktion av $(x-2)^2$.)

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) \quad (+C)$$

(b) Partiell integration

$$x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

(2)

$$\int_1^2 x\arccos\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}\right]_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{\cancel{x^2}}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)dx =$$

$$= 2\arccos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arccos 1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\int\frac{(x^2-1)'\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-1}\right]_1^2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

5. $\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{2}{1-\cancel{2x}+x^2+1+\cancel{2x}+x^2} = \frac{1}{1+x^2} =$$

$= (\arctan x)'$ överallt, där

funktionerna är definierade

$\Rightarrow$ skillnaden mellan f och g är konstant, men olika konstanter på

de två intervallen

$(-\infty, 1)$: $x=0$ $\quad f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$g(0) = \arctan 0 = 0$

$g(x)\Big|_{x=0}$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + \frac{\pi}{4}$ i $(-\infty, 1)$ ⑥

$(1, +\infty)$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(x) = g(x) - \frac{3\pi}{4}$ i $(1, \infty)$

6.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000^{\cancel{n+1}} / (n+1)!}{\cancel{1000^n} / \cancel{n!}} = \frac{1000}{n+1}$$

$\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$ för $n \leq 999$

$x_{n+1} < x_n$ för $n > 999$

$\Rightarrow \max_{n\in\mathbb{N}} x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}$

($\Rightarrow \exists$ största element)