TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2018-10-31, kl. 8:30 – 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_2^\infty \frac{dx}{\ln(x^3)}; \qquad \textbf{(b)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}; \qquad \textbf{(c)} \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x(x-1)}dx;$$

$$\textbf{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}dx; \qquad \textbf{(e)} \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx; \qquad \textbf{(f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \arccos x \; dx\,.$ (3p)

5. Visa på två olika sätt olikheten

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|, \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}. \quad (6p)$$

6. Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (a,b). Givet n reella tal $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$, visa att det finns (minst) en punkt $\xi \in (a,b)$, sådan att

$$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \qquad (6p)$$

7.(a) Ge definitionen för en funktions deriverbarhet i en punkt och i en mängd. (2p)

(b) Formulera och bevisa produktregeln för derivering. (5p)

(c) Vilken av metoderna som används för att hitta primitiva funktioner bygger på produktregeln för derivering? (1p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

TMA970 Inledande matematisk analys F1 / TM1

Lösningar 31/10 - 2018

1. (a) divergent; (b) divergent;
(c) konvergent; (d) konvergent;
(e) konvergent; (f) konvergent.

---

2. (a) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\cancel{x} + \sqrt{x} - \cancel{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

(b) $\dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} =$

$$= \frac{\cancel{1} + \tan x - \cancel{1} - \sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

$\left((1-\cos x)(1+\cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x\right)$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$$ (2)

$$\longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

---

(3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\quad D_f : x > 0$

Nollställen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) < 0 \quad \text{i} \quad (0,1) \\ f(x) > 0 \quad \text{i} \quad (1,\infty) \end{array}\right\} \text{tecken}$$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \text{"}\frac{-\infty}{+0}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

inga vertikala asymptoter

sned (horisontell) asymptot i $+\infty$: $y = 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} =$$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}} = 0 \text{ för } x = e^2$$

x	0		e^2	
f'		$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ f växande i $(0, e^2)$, avtagande i (e^2, ∞), lokmax i $x = e^2$

$$f''(x) = \frac{-\cancel{\frac{1}{x}}\,\cancel{2}x^{\cancel{3/2}\,1/2} - \cancel{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\,(2-\ln x)}{2\cancel{4}x^3}$$ $\boxed{3}$

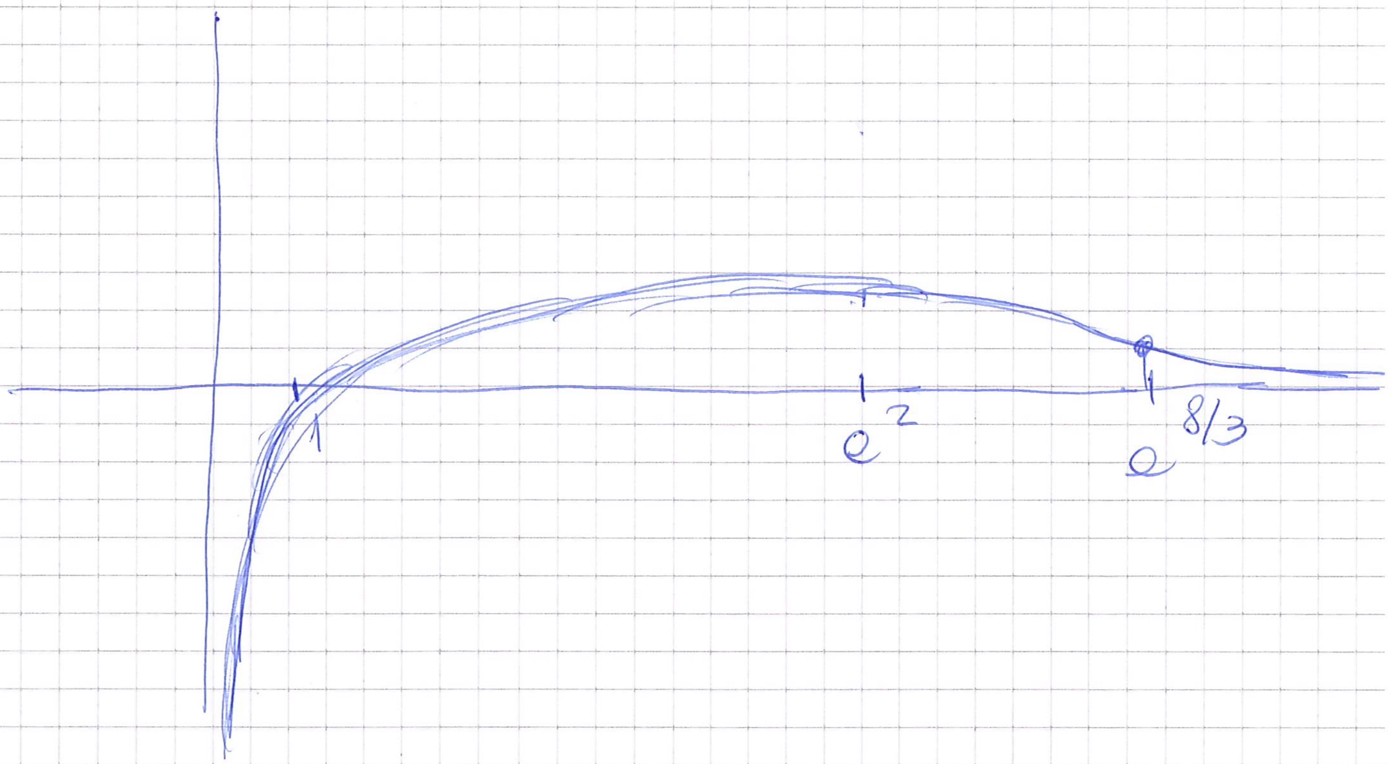
$$= \frac{-1-3+\frac{3}{2}\ln x}{2x^{5/2}} = \frac{3\ln x - 8}{4x^{5/2}}$$

$$f'' = 0 \Leftarrow x = e^{8/3}$$

x	0		$e^{8/3}$	
f''		$-$	0	$+$

x	0	1	e^2	$e^{8/3}$	$+\infty$
f	$-\infty$	0	loc max $2/e$		0
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f''	$-$	$-$		0	$+$

inflexion



4

4. (a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\cos 2x}\,dx =$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}\,dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ (\sin x)'\,dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3-2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,t\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{3}}{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}\,t \quad (+C) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right) \quad (+C)$$

(b) $$\int_0^{1-\varepsilon} \arccos x\,dx = \Big[x \arccos x\Big]_0^{1-\varepsilon} -$$

$$- \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(-1)\,dx =$$

generaliserad! $\int_0^1$

$$= (1-\varepsilon)\arccos(1-\varepsilon) - 0 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (1-\varepsilon)\arccos(1-\varepsilon) -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

5

$$= (1-\varepsilon)\arccos(1-\varepsilon) - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \arccos 1 - \sqrt{1-1^2} + \sqrt{1-0^2} =$$

$$= 0 - 0 + 1$$

OBS! Båda deluppgifterna kan göras på andra sätt, t. ex.
(a) med universalsubstitutionen, och
(b) med substitutionen $x = \cos t$.

---

5. (i) $$|\sin x - \sin y| = \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$$

För $\frac{|x-y|}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ har vi

$$2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| = 2\sin\frac{|x-y|}{2} \leq \cancel{2}\,\frac{|x-y|}{\cancel{2}}$$

För $\frac{|x-y|}{2} \geq \frac{\pi}{2} (>1)$ har vi

$$2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq 2 \leq \cancel{2}\cdot\frac{|x-y|}{\cancel{2}}$$

(ii) Enligt Lagranges medelvärdessats $\exists\ \xi$ mellan x och y s.a. ($f=\sin$)

$$(x\neq y)\quad |\sin x - \sin y| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{=|\cos\xi|}\,|x-y| \leq |x-y|$$

För $x=y$: $0=0$, gäller fortfarande.

(6) 6.

Om $f(x_1) = \ldots = f(x_n)$,
så kan ξ väljas som vilken som helst av punkterna x_k, $k=1\ldots n$.

Om $\exists k, l : f(x_k) \neq f(x_l)$:
utan inskränkning kan vi anta att $f(x_1) = \min(f(x_1), \ldots, f(x_n))$,
och att $f(x_n) = \max(f(x_1), \ldots, f(x_n))$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \in (f(x_1), f(x_n))$$

$\Rightarrow$ enligt satsen om mellanliggande värden

$\exists \xi$ mellan x_1 och x_n s.a.

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

$x_1, x_2 \in (a, b)$, intervall

$\Rightarrow \xi \in (a, b)$